تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های چندلایه کامپوزیتی عمیق با استفاده از روش رایلی-ریتز و به‌کارگیری فرآیند گرام اشمیت

سمن صدری‌پور[آ*]، رمضانعلی جعفری تلوکلائی[ب]، عبدالله ملک‌جعفریان[پ]

[آ] ایران، بابل، خیابان شریعتی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، دانشکده مهندسی مکانیک، ۴۷۱۴۸۷۳۱۱۳، دکترای مهندسی مکانیک.

[ب] ایران، بابل، خیابان شریعتی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، دانشکده مهندسی مکانیک، ۴۷۱۴۸۷۳۱۱۳، دانشیار. مهندسی مکانیک.

[پ] ایرلند، دوبلین، دانشگاه دوبلین، دانشکده مهندسی عمران، گروه پژوهشی، استادیار.

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: *ssadripour@gmail.com*

چکیده

در این مقاله ارتعاشات آزاد پوسته‌های چندلایه کامپوزیتی از نوع دو انحناء و عمیق با استفاده از روش رایلی-ریتز مورد بررسی قرار می‌گیرد. هندسه و شرایط مرزی پوسته‌های درنظر گرفته شده در این تحلیل می‌تواند کاملا دلخواه باشد. به‌منظور بررسی این نوع سازه‌ها، تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول استفاده شده است. به‌منظور حل مساله از روش رایلی-ریتز، با درنظر گرفتن سری‌های ایجاد شده با استفاده از روش گرام-اشمیت، استفاده شده است. لازم به ذکر است که با توجه به نتایج به‌دست آمده این سری‌ها دارای همگرایی سریع‌تری در مقایسه با سری‌های چندجمله‌ای به‌کار رفته در پژوهش‌های دیگر هستند. به‌منظور صحه‌گذاری بر نتایج به‌دست آمده از این پژوهش یک مطالعه مقایسه‌ای انجام شده است که اعتبار نتایج و روش حل را تایید می‌کند. در نهایت تاثیر پارامترهای مختلف مانند شرایط مرزی، لایه چینی، زاویه مدور، زاویه قطبی و همچنین نسبت ضخامت به شعاع انحناء، مورد بررسی قرار گرفته است. به‌عنوان نمونه، نتایج نشان می‌دهد افزایش زاویه مدور منجر به کاهش فرکانس‌های طبیعی و افزایش ضخامت و زاویه قطبی سبب افزایش فرکانس‌ها می‌شود.

کلمات کلیدی: ارتعاشات آزاد؛ پوسته‌های دوانحناء عمیق؛ روش رایلی-ریتز؛ روند گرام اشمیت.

۱- مقدمه

استفاده از سازه‌های چندلایه کامپوزیتی امروزه گسترش چشم‌گیری در صنایع مختلف همچون صنایع هواپیماسازی، ساخت بدنه کشتی‌ها و قایق‌ها، زیردریایی‌ها، پره‌های توربین و در مهندسی پزشکی داشته است. دلیل این امر را می‌توان در

ویژگی‌های مطلوب این نوع سازه‌ها در مقایسه با سازه‌های تک‌لایه فلزی دانست. ویژگی‌هایی همچون نسبت سفتی و استحکام به وزن بالا، مقاومت در برابر خوردگی و خستگی و مقاومت در برابر ضربه از جمله این خواص است. از این رو داشتن درکی صحیح از رفتار آنها برای طراحی هرچه بهتر آنها امری ضروری است. در میان انواع هندسه، پوسته‌ها به‌علت دارا بودن انحناء قادر به تحمل نیروهای بزرگ‌تری در مقایسه با صفحات می‌باشند، تنوع هندسه و انحنا در پوسته‌ها انتخاب آن‌ها را برای کاربری‌های مختلف آسان نموده است. از طرف دیگر تنوع بالای هندسه در پوسته‌ها این امکان را فراهم می‌سازد تا با توجه به کاربرد آن، هندسه موردنظر را انتخاب کرد.

تا کنون مطالعات بسیاری برروی پوسته‌ها انجام شده است. پژوهش‌های انجام شده برروی پوسته‌های نازک تا دهه ۷۰ میلادی توسط لیسا [۱] گردآوری و مرور شده است. پس از آن نیز لیو و همکاران [۲] و همچنین کاتو و همکاران [۳] مطالعات انجام شده درباره پوسته‌های کم‌عمق و رفتار دینامیکی پوسته‌های کامپوزیتی را به ترتیب مرور کرده‌اند. در اینجا تعدادی از پژوهش‌های انجام شده برروی ارتعاشات آزاد پوسته‌های دو انحناء مرور می‌شود. در سال ۱۹۹۶ لیو و لیم [۴] پوسته‌های نازک و کم‌عمق دو انحناء را درنظر گرفتند و برای شرایط مرزی‌های مختلف و شعاع‌های گوسین متفاوت، ارتعاشات آزاد این نوع سازه‌ها را مورد تحلیل قرار دادند. پس از آن در سال ۱۹۹۷ لیم و همکاران [۵] ارتعاشات پوسته‌های کامپوزیتی کم‌عمق مخروطی شامل اثرات از پیش پیچیده شدن را برای لایه‌چینی متقارن و نامتقارن بررسی کردند. در سال ۲۰۰۲ لیو و همکاران [۶] ارتعاشات سه-بعدی پوسته‌های دو انحناء نازک و ضخیم را با استفاده از روش پی-ریتز برای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار دادند. تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های همسانگرد و نازک و کم‌عمق با هندسه‌های استوانه‌ای، کروی، سهموی و هذلولوی در سال ۲۰۰۹ توسط مونتروبیو [۷] با استفاده از روش رایلی-ریتز و روش پنالتی انجام شد.

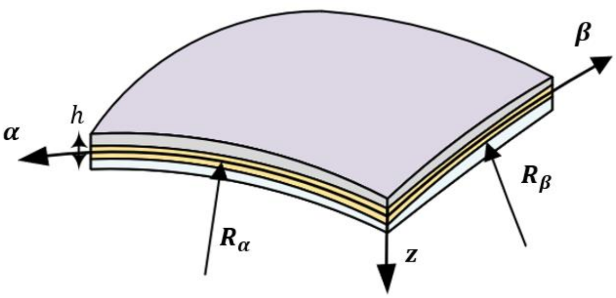
در سال ۲۰۱۲ حسینی هاشمی و آتشی‌پور [۸] برای ارتعاشات آزاد درون‌صفحه و ارتعاشات آزاد برون‌صفحه یک پوسته نسبتا ضخیم چندلایه کروی و همسانگرد عرضی، یک حل بسته براساس تئوری ساندرز بدون هیچ تقریبی بیان کردند. معادلات حرکت و شرایط مرزی در این پژوهش براساس اصل همیلتون به‌دست آمد و از هر دو روش حل ناویر و لوی به‌منظور حل این مسئله استفاده شد. اسدی و همکاران و اسدی و کاتو نیز [۹, ۱۰] ارتعاشات پوسته‌های چندلایه کامپوزیتی نسبتا ضخیم و عمیق با لایه‌چینی مختلف را با استفاده از روش مربعات تفاضلی براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول بررسی کردند. در سال ۲۰۱۷ تورنابن و همکاران [۱۱] یک تئوری مرتبه بالا به‌منظور محاسبه فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های چندلایه کامپوزیتی ارائه کردند. در این پژوهش به‌منظور حل معادلات از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته (GDQ) استفاده شد و نتایج به‌دست آمده با نتایج پژوهش‌های پیشین و نتایج حاصل از نرم‌افزارهای تجاری المان محدود مقایسه گردید. در سال ۲۰۱۸ نیز روت و همکاران [۱۲] ارتعاشات آزاد پوسته‌های چندلایه کامپوزیتی با یک و دو انحناء را در محیط دمایی با استفاده از روش المان محدود مطالعه کردند. پوسته مورد نظر به‌صورت ریاضی با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالا مدل‌سازی شد. در این پژوهش از المان ایزوپارامتریک پوسته با هشت گره و هر گره دارای هفت درجه آزادی استفاده شد. ملک‌زاده فرد و باغستانی [۱۳] در سال ۲۰۱۷ با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌های همسانگرد عمیق و نسبتا ضخیم با استفاده از روش رایلی-ریتز پرداختند. ایشان در این پژوهش شرایط مرزی و هندسه‌های مختلفی را مورد بررسی قرار دادند.

با مطالعه پژوهش‌های پیشین چنین بر می‌آید که پارامتر عمق پوسته در بسیاری از مطالعات نادیده گرفته شده است. واضح است که تنها در شرایطی خاص می‌توان از فرض پوسته کم‌عمق استفاده کرد و این ساده‌سازی می‌تواند منجر به بروز خطا و همچنین محاسبه نادرست فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها شود. از این رو در پژوهش حاضر، پارامتر عمق پوسته درنظر گرفته می‌شود. همچنین به‌منظور بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌های دوانحناء عمیق از نوع چندلایه کامپوزیتی روش نیمه تحلیلی رایلی-

ریتز استفاده می‌شود. در این روش توابع پایه با استفاده از روش گرام اشمیت محاسبه می‌شوند که به نسبت سری‌های دیگر نرخ همگرایی بالایی دارند.

۲- فرمول‌بندی مساله

یک پوسته چندلایه کامپوزیتی با ضخامت ثابت h را همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، درنظر بگیرید. دستگاه مختصات منحنی الشکل متعامد $o\alpha\beta z$ به‌گونه‌ای درنظر گرفته شده است که α در جهت طول پوسته، β در جهت عرض پوسته و z در جهت ضخامت و عمود بر سطح میانی می‌باشد.



شکل (۱): شماتیکی از پوسته کامپوزیتی دو انحناء

از آنجایی که تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای پوسته‌های نازک و همچنین پوسته‌های نسبتا ضخیم نتایج مناسبی ارائه می‌دهد، بنابراین میدان تغییر مکان درنظر گرفته شده عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
u(\alpha,\beta,z,t) &= [u_0(\alpha,\beta) + z\psi_\alpha(\alpha,\beta)]e^{j\varpi t} \\
v(\alpha,\beta,z,t) &= [v_0(\alpha,\beta) + z\psi_\beta(\alpha,\beta)]e^{j\varpi t}, \qquad i = t,b \\
w(\alpha,\beta,z,t) &= [w_0(\alpha,\beta)]e^{j\varpi t}
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

که در آن u، v، w به‌ترتیب مولفه‌های جابجایی در راستای α، β و z، t بیان‌گر زمان، u_0، v_0 و w_0 مولفه‌های جابجایی سطح میانی و ψ_α و ψ_β به ترتیب دوران محور عمود بر سطح میانی حول محورهای β و α می‌باشند. روابط کرنش-جابجایی برای پوسته‌ها با درنظر گرفتن پارامتر عمق پوسته عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{A(1+z/R_\alpha)}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{v}{B} + \frac{Aw}{R_\alpha}\right) \\
\varepsilon_\beta &= \frac{1}{B(1+z/R_\beta)}\left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{u}{A} + \frac{Bw}{R_\beta}\right) \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{\alpha z} &= \frac{1}{A(1+z/R_\alpha)}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + A(1+z/R_\alpha)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{A(1+z/R_\alpha)}\right) \\
\gamma_{\beta z} &= \frac{1}{B(1+z/R_\beta)}\frac{\partial w}{\partial \beta} + B(1+z/R_\beta)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{B(1+z/R_\beta)}\right) \\
\gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{A(1+z/R_\alpha)}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{u}{B}\right) + \frac{1}{B(1+z/R_\beta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{v}{A}\right)
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

که در آن A و B بیان‌گر پارامترهای لامه پوسته می‌باشند. با قرار دادن میدان جابجایی (۱) در روابط کرنش-جابجایی (۲) کرنش‌ها برای سازه به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_\alpha^i = \frac{1}{(1+z_i/R_\alpha^i)}\left(\varepsilon_{0\alpha}^i + z_i\kappa_\alpha^i\right)\\
&\varepsilon_\beta^i = \frac{1}{\left(1+z_i/R_\beta^i\right)}\left(\varepsilon_{0\beta}^i + z_i\kappa_\beta^i\right)\\
&\varepsilon_z^i = \varepsilon_{0z}^i\\
&\gamma_{\alpha z}^i = \frac{\gamma_{0\alpha z}^i}{(1+z_i/R_\alpha^i)}\\
&\gamma_{\beta z}^i = \frac{\gamma_{0\beta z}^i}{\left(1+z_i/R_\beta^i\right)}\\
&\gamma_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{(1+z_i/R_\alpha^i)}\left(\varepsilon_{0\alpha\beta}^i + z_i\kappa_{\alpha\beta}^i\right) + \frac{1}{\left(1+z_i/R_\beta^i\right)}\left(\varepsilon_{0\beta\alpha}^i + z_i\kappa_{\beta\alpha}^i\right)
\end{aligned} \tag{۳}$$

از طرفی برای مواد ارتوتروپیک، تنش‌ها را می‌توان با استفاده از رابطه زیر به کرنش‌ها مرتبط کرد:

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix}\sigma_\alpha^k\\ \sigma_\beta^k\\ \tau_{\alpha\beta}^k\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k\\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k\\ \bar{Q}_{16}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_\alpha^k\\ \varepsilon_\beta^k\\ \gamma_{\alpha\beta}^k\end{Bmatrix}\\
&\begin{Bmatrix}\tau_{\beta z}^k\\ \tau_{\alpha z}^k\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{Q}_{44}^k & \bar{Q}_{45}^k\\ \bar{Q}_{45}^k & \bar{Q}_{55}^k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{\beta z}^k\\ \gamma_{\alpha z}^k\end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن مولفه‌های $\bar{Q}_{ij}^k$ مولفه‌های ماتریس سفتی کاهش‌یافته می‌باشند [14]. از طرفی منتجه‌های تنش را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix}N_\alpha^i\\ N_{\alpha\beta}^i\\ Q_\alpha^i\end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N^i}\int_{z_{i_{k-1}}}^{z_{i_k}}\begin{Bmatrix}\sigma_\alpha^i\\ \sigma_{\alpha\beta}^i\\ \sigma_{\alpha z}^i\end{Bmatrix}\left(1+\frac{z_i}{R_\beta^i}\right)dz_i \qquad \begin{Bmatrix}M_\alpha^i\\ M_{\alpha\beta}^i\end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N^i}\int_{z_{i_{k-1}}}^{z_{i_k}}\begin{Bmatrix}\sigma_\alpha^i\\ \sigma_{\alpha\beta}^i\end{Bmatrix} z_i\left(1+\frac{z_i}{R_\beta^i}\right)dz_i\\
&\begin{Bmatrix}N_\beta^i\\ N_{\beta\alpha}^i\\ Q_\beta^i\end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N^i}\int_{z_{i_{k-1}}}^{z_{i_k}}\begin{Bmatrix}\sigma_\beta^i\\ \sigma_{\alpha\beta}^i\\ \sigma_{\beta z}^i\end{Bmatrix}\left(1+\frac{z_i}{R_\alpha^i}\right)dz_i \qquad \begin{Bmatrix}M_\beta^i\\ M_{\beta\alpha}^i\end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N^i}\int_{z_{i_{k-1}}}^{z_{i_k}}\begin{Bmatrix}\sigma_\beta^i\\ \sigma_{\alpha\beta}^i\end{Bmatrix} z_i\left(1+\frac{z_i}{R_\alpha^i}\right)dz_i
\end{aligned} \tag{۵}$$

با درنظر گرفتن روابط مربوط به تنش‌ها و کرنش‌ها، انرژی کرنشی و انرژی جنبشی سازه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2}\int_\alpha\int_\beta \{&N_\alpha\varepsilon_{0\alpha} + N_\beta\varepsilon_{0\beta} + N_{\alpha\beta}\varepsilon_{0\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}\varepsilon_{0\beta\alpha} + M_\alpha\kappa_\alpha + M_\beta\kappa_\beta + M_{\alpha\beta}\kappa_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}\kappa_{\beta\alpha}\\
&+ Q_\alpha\gamma_{0\alpha z} + Q_\beta\gamma_{0\beta z}\}\, AB\, d\alpha\, d\beta
\end{aligned} \tag{۶}$$

$$T = \frac{1}{2}\int_\alpha\int_\beta \left\{\bar{I}_0(\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2) + \bar{I}_1\left(\dot{\psi}_\alpha^2 + \dot{\psi}_\beta^2\right) + \bar{I}_2\left(\dot{u}_o\dot{\psi}_\alpha + \dot{v}_o\dot{\psi}_\beta\right)\right\} ABd\beta\, d\alpha \tag{۷}$$

که در آن:

$$[\bar{I}_0, \bar{I}_1, \bar{I}_2] = \int_{-\frac{f_i}{2}}^{\frac{f_i}{2}} \rho[1, z, z^2]\left(1+\frac{z}{R_\alpha}\right)\left(1+\frac{z}{R_\beta}\right)dz \tag{۸}$$

به‌منظور محاسبه پاسخ ارتعاشی سیستم از روش رایلی-ریتز استفاده می‌شود. از این رو لازم است برای مجهولات پاسخ‌هایی حدسی در نظر گرفته شود که حداقل شرایط مرزی ضروری مساله را ارضاء کند. در این مقاله از روند گرام-اشمیت به‌منظور حدس پاسخ استفاده می‌شود. بنابراین:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{m} A_i \varphi_i^u(\alpha,\beta) \qquad v_0 = \sum_{i=1}^{m} B_i \varphi_i^v(\alpha,\beta) \qquad w_0 = \sum_{i=1}^{m} C_i \varphi_i^w(\alpha,\beta)$$
$$\psi_\alpha = \sum_{i=1}^{m} D_i \varphi_i^{\psi_\alpha}(\alpha,\beta) \qquad \psi_\beta = \sum_{i=1}^{m} E_i \varphi_i^{\psi_\beta}(\alpha,\beta) \qquad (۹)$$

که در آن m تعداد جملات سری، A_i، B_i، ... و E_i ضرایب مجهول و φ_i^k توابع معلوم هستند که به صورت زیر تعریف می-شوند [15]:

$$\varphi_i^k = \left(f_i(\alpha,\beta) - a_{i,1}\right)\varphi_1^k(\alpha,\beta) - a_{i,2}\varphi_2^k(\alpha,\beta) - a_{i,3}\varphi_3^k(\alpha,\beta) - \cdots - a_{i,i-1}\varphi_{i-1}^k(\alpha,\beta) \qquad (۱۰)$$

که در آن $f_i(\alpha,\beta)$ توابع وزن هستند و به‌صورت 1،α ، β،... و $\alpha^{i-n}\beta^n$ تعریف می‌شوند ($i = 1,\dots,m$ و $n = 0,\dots,m$).
از طرفی پارامتر $a_{i,i-1}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_{i,i-1} = \frac{\int_0^a \int_0^b \varphi_1^k(\alpha,\beta)\varphi_{i-1}^k(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta}{\int_0^a \int_0^b \varphi_{j-1}^k(\alpha,\beta)\varphi_{i-1}^k(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta} \qquad (۱۱)$$

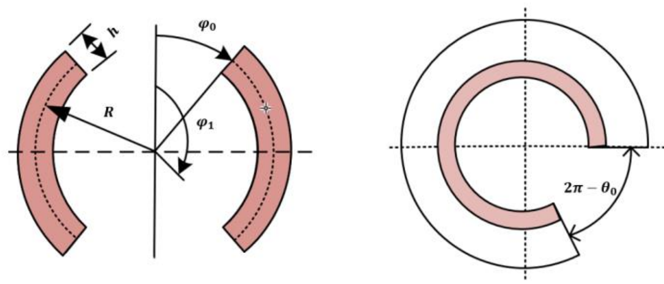
براساس روش رایلی-ریتز لازم است لاگرانژین سیستم نسبت به ضرایب مجهول کمینه شود، که نتیجه آن معادله مقدار ویژه زیر است:

$$([K] - \omega^2[M])\{A_i, B_i, C_i, D_i, E_i\}^T = \{0\} \qquad (۱۲)$$

۳- مطالعه عددی

۳-۱- *اعتبار سنجی حل*

در این بخش به بررسی اعتبار نتایج حاصل از این پژوهش برای پوسته‌های کروی عمیق پرداخته می‌شود که در آن پارامترهای لامه $A = R\sin\varphi$ و $B = R$ و همچنین مختصه منحنی‌الشکل α و β به ترتیب معادل با مختصه φ و θ درنظر گرفته می‌شود. به‌منظور اعتبارسنجی، مدل ارائه شده توسط جین و همکاران [۱۶] مورد بررسی قرار گرفته است که در آن مقادیر فرکانس (Hz) یک پوسته کروی ارتوتروپیک از نوع عمیق با یازده شرط مرزی متفاوت در جدول (۱) ارائه شده است. در این مثال $\phi_0 = \pi/4$ و $\phi_1 = \pi/2$، نسبت ضخامت به شعاع انحناء برابر با $h/R = 0.3$، $R = 1\text{m}$، و $\theta_0 = \pi, 5\pi/4$ در نظر گرفته شده است. همچنین در این مثال $E_{11} = 150$ GPa، $E_{22} = E_{33} = 10$ GPa، $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5$ GPa و $\rho = 4500\ \text{kg/m}^3$ درنظر گرفته شده است. نمایی از این پوسته در شکل (۱) آمده است.



شکل (۱): نمایی از پوسته عمیق درنظر گرفته شده

جدول (۱): مقادیر به‌دست آمده از پژوهش حاضر و مقایسه آن با مقادیر گزارش شده توسط جین و همکاران برای پوسته کروی عمیق

		Boundary Conditions										
θ_0		FFFF	FFFC	CFFF	FSFS	FCFC	SFSF	SSSS	SCSC	CFCF	CSCS	CCCC
π	Jin et al. [16]	47.19	11.23	241.04	63.47	84.09	97.43	205.91	209.10	626.26	629.50	676.95
		94.61	16.78	244.82	109.78	97.59	198.64	368.42	372.44	669.88	676.00	800.45
		129.46	35.16	254.48	166.60	176.89	367.72	540.50	543.66	789.91	796.76	961.81
	Present	47.60	11.18	239.31	63.11	82.62	95.79	203.46	206.75	623.43	625.59	672.27
		96.08	16.66	243.62	110.33	94.02	196.79	366.81	370.00	668.53	672.24	795.02
		132.71	34.80	253.51	175.68	174.10	366.81	536.88	539.27	790.83	795.90	954.58
$\frac{5\pi}{4}$	Jin et al. [16]	29.37	8.17	242.94	6.13	54.33	99.90	177.12	179.16	627.17	629.50	660.21
		60.37	11.01	243.11	8.71	56.66	169.06	301.12	304.42	655.30	659.69	743.83
		82.48	21.41	250.47	32.42	122.29	299.61	437.16	440.06	737.18	741.85	861.91
	Present	29.99	8.11	241.44	5.66	53.18	98.16	174.76	176.90	624.11	625.60	655.81
		62.49	10.95	241.79	8.64	54.57	167.34	299.57	302.21	653.38	655.90	738.91
		85.09	21.24	251.13	32.00	120.25	298.82	433.84	436.19	737.79	740.99	856.40

همان‌طور که از نتایج برمی‌آید با استفاده از روش رایلی-ریتز و درنظر گرفتن تعداد ۳۰ جمله نتایج بسیار به نتایج به‌دست آمده از حل سه‌بعدی انجام شده توسط جین و همکاران نزدیک است و اختلاف ناچیز را می‌توان ناشی از روش حل متفاوت (حل سه‌بعدی در مقایسه با حل دوبعدی) درنظر گرفت، همچنین با افزایش تعداد جملات درنظر گرفته شده می‌توان مقادیر پاسخ را بهبود بخشید.

۳-۲- *نتایج و بحث*

در این بخش مثال‌های متنوعی به‌منظور بررسی تاثیر پارامترهای مختلف برروی ارتعاشات آزاد پوسته ساندویچی کروی چندلایه کامپوزیتی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در تمامی این مثال‌ها $E_{11} = 150$ GPa، $E_{22} = E_{33} = 10$ GPa، $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 5$ GPa و $\rho = 4500\ \mathrm{kg/m^3}$ درنظر گرفته شده است. به‌عنوان اولین مثال، یک پوسته کروی با $\phi_0 = \pi/4$، $\phi_1 = \pi/2$، شعاع متوسط 1m و نسبت ضخامت به شعاع برابر با 0.3 درنظر گرفته می‌شود. شرایط مرزی از نوع کاملا ساده است و به‌منظور بررسی تاثیر شرایط مرزی و لایه‌چینی، سه نوع لایه‌چینی و چهار نوع شرایط مرزی متفاوت در هر حالت درنظر گرفته شده است. و برای هر حالت پنج فرکانس ابتدایی ارائه شده است. لازم به ذکر است که در این مقاله به‌منظور بیان شرایط مرزی از حروف

اختصاری استفاده می‌شود به عنوان مثال شرط مرزی CFCS بیان گر این نکته است که مرز $\phi = \phi_0$، از نوع گیردار، مرز $\theta = \theta_0$، آزاد، مرز $\phi = \phi_1$ گیردار و مرز $\theta = \theta_1$ از نوع ساده درنظر گرفته شده است.

جدول (۲): پنج فرکانس اول (هرتز) برای پوسته کروی با شرایط مرزی، لایه چینی متفاوت

($\phi_0 = \pi/4$, $\phi_1 = \pi/2$, $R = 1m$ and $h/R = 0.3$)

لایه چینی	شرایط مرزی	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
[0/90/90/0]	CCCC	786.4455	900.7347	980.8123	1076.658	1198.593
	SSSS	264.9928	389.5496	554.9119	589.0052	589.7275
	CFCF	622.2103	756.4542	850.8688	875.1801	901.2037
	FCFC	128.7785	145.6149	245.129	277.8168	366.3129
[0/90/0/90]	CCCC	788.9218	900.1947	997.4372	1095.261	1212.885
	SSSS	268.0649	391.2409	558.0266	571.7557	575.3111
	CFCF	622.0373	757.3573	844.5142	873.4094	911.619
	FCFC	132.9708	173.0809	245.0142	310.0697	374.1796
[30/60/60/30]	CCCC	887.8541	924.1541	962.1082	1024.114	1088.409
	SSSS	317.2455	525.9976	680.4683	707.732	785.5683
	CFCF	745.9194	785.8849	868.109	891.9017	926.0696
	FCFC	117.3661	138.656	240.6595	274.7607	379.7562

همان‌طور که از نتایج جدول برمی‌آید، شرایط مرزی تاثیر قابل توجهی برروی فرکانس‌های طبیعی سیستم دارند، به نحوی که شرایط مرزی کاملا گیردار دارای بیشترین فرکانس و شرایط مرزی FCFC دارای کم‌ترین فرکانس است و این موضوع به سفتی ناشی از شرایط مرزی مرتبط است. از طرف دیگر با توجه به اینکه در شرایط مرزی CFCF شرط مرزی گیردار برروی مرزهای ϕ_0 و ϕ_1 اعمال شده است و طول مرزی بیشتری را در بر می‌گیرد، فرکانس‌ها با حالت FCFC که در آن مرزهای θ_0 و θ_0 گیردار و دو مرز دیگر آزاد هستند، متفاوت می‌باشد.

مثال قبل مجددا در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرد با این تفاوت که لایه‌چینی از نوع [0/90/0/90] و شرایط مرزی کاملا ساده درنظر گرفته شده است. به‌منظور بررسی تاثیر زاویه مدور برروی فرکانس‌های طبیعی سیستم، پنج زاویه مدور مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به نتایج به‌دست آمده، افزایش زاویه مدور سبب کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌گردد، که با توجه به افزایش طول سازه و درنتیجه افزایش آزادی سیستم قابل توجیه است.

جدول (۳): پنج فرکانس اول (هرتز) برای پوسته کروی با زوایه مدور متفاوت

($\phi_0 = \pi/4$, $\phi_1 = \pi/2$, $R = 1m$ and $h/R = 0.3$)

θ	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\pi/4$	625.1771	723.6591	763.6148	1273.9154	1290.2326
$\pi/2$	387.1028	573.6825	625.3547	729.0880	766.2256
$3\pi/4$	299.0010	498.4611	563.3794	617.3331	625.4450
π	268.0649	391.2409	558.0266	571.7557	575.3111
$5\pi/4$	255.2689	334.4008	457.7365	564.9956	581.2091

در مثال بعد، تاثیر زاویه قطبی برروی فرکانس‌های طبیعی سیستم بررسی می‌گردد. به این منظور چهار زاویه قطبی مختلف درنظر گرفته شده است. با توجه به شکل (۲) با ثابت نگه داشتن پارامتر ϕ_1 و افزایش پارامترϕ_0، عرض سازه کاهش پیدا کرده و در نتیجه فرکانس‌های طبیعی سیستم افزایش می‌یابد. نتایج در جدول زیر ارائه شده است.

جدول (۴): پنج فرکانس اول (هرتز) برای پوسته کروی با زاویه قطبی متفاوت

($\phi_1 = \pi$, $R = 1m$, $\theta_0 = \pi$, and $h/R = 0.3$)

ϕ_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\pi/6$	95.87518	179.3717	220.8756	333.3821	350.3017
$\pi/3$	195.7368	202.0755	223.0331	328.7518	440.4856
$2\pi/3$	299.7992	462.627	551.2219	581.5941	708.5668
$5\pi/6$	778.9844	1015.118	1167.399	1234.487	1425.316

در مثال بعد، تاثیر نسبت ضخامت مورد بررسی قرار گرفته است. به این منظور سه نسبت ضخامت مختلف درنظر گرفته شده است. همان‌طور که در جدول آمده است، با افزایش نسبت ضخامت، فرکانس‌ها افزایش می‌یابد که ناشی از افزایش سفتی سازه با توجه به افزایش ضخامت است.

جدول (۵): پنج فرکانس اول (هرتز) برای پوسته کروی با نسبت ضخامت به شعاع انحناء متفاوت

($\phi_0 = \pi/4$, $\phi_1 = \pi/2$, $R = 1m$ and $\theta_0 = \pi$)

h/R	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
0.1	250.6691	379.3322	438.0112	445.2308	489.4119
0.2	265.4378	393.3112	523.6959	543.1940	558.8061
0.3	268.0649	391.2409	558.0266	571.7557	575.3111

مراجع

1. Leissa, A.W., *Vibration of shells*. Vol. 288. 1973: Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space.
2. Liew, K., C. Lim, and S. Kitipornchai, *Vibration of shallow shells: a review with bibliography.* 1997.
3. Qatu, M.S., R.W. Sullivan, and W. Wang, *Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009.* Composite Structures, 2010. **93**(1): p. 14-31.
4. Liew, K. and C. Lim, *Vibration of doubly-curved shallow shells.* Acta mechanica, 1996. **114**(1-4): p. 95-119.
5. Lim, C., K. Liew, and S. Kitipornchai, *Free vibration of pretwisted, cantilevered composite shallow conical shells.* AIAA journal, 1997. **35**(2): p. 327-333.
6. Liew, K., L. Peng, and T. Ng, *Three-dimensional vibration analysis of spherical shell panels subjected to different boundary conditions.* International Journal of Mechanical Sciences, 2002. **44**(10): p. 2103-2117.
7. Monterrubio, L., *Free vibration of shallow shells using the Rayleigh—Ritz method and penalty parameters.* Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2009. **223**(10): p. 2263-2272.
8. Hosseini-Hashemi, S., et al., *An exact closed-form procedure for free vibration analysis of laminated spherical shell panels based on Sanders theory.* Archive of Applied Mechanics, 2012. **82**(7): p. 985-1002.
9. Asadi, E. and M.S. Qatu, *Free vibration of thick laminated cylindrical shells with different boundary conditions using general differential quadrature.* Journal of vibration and control ,2013 .**19**)3 :(p. 356-366.
10. Asadi, E., W. Wang, and M.S. Qatu, *Static and vibration analyses of thick deep laminated cylindrical shells using 3D and various shear deformation theories.* Composite Structures, 2012. **94**(2): p. 494-500.
11. Tornabene, F., et al., *An equivalent layer-wise approach for the free vibration analysis of thick and thin laminated and sandwich shells.* Applied Sciences, 2017. **7**(1): p. 17.

12. Rout, M., S.S. Hota, and A. Karmakar, *Free vibration characteristics of delaminated composite pretwisted stiffened cylindrical shell.* Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2018. **232**(4): p. 595-611.
13. Fard, K.M. and A. Baghestani, *Free vibration analysis of deep doubly curved open shells using the Ritz method.* Aerospace Science and Technology, 2017. **69**: p. 136-148.
14. Jones, R.M., *Taylor and Francis,".* Mechanics of Composite Materials, 1999.
15. Abedi, M., R.-A. Jafari-Talookolaei, and P.S. Valvo, *A new solution method for free vibration analysis of rectangular laminated composite plates with general stacking sequences and edge restraints.* Computers & Structures, 2016. **175**: p. 144-156.
16. Jin, G., T. Ye, and S. Shi, *Three-dimensional vibration analysis of isotropic and orthotropic open shells and plates with arbitrary boundary conditions.* Shock and Vibration, 2015. **2015**.