

ISAV2023

میزد، همین کنفرانس بین المللی آگوستیک و ارتعاشات

تهران - ایران

۲۹ و ۳۰ آذر ماه ۱۴۰۲



انجمن آگوستیک و ارتعاشات ایران

بررسی ارتعاشات آزاد یک نانو میله FGM ترک دار

درنا کمالی^{۱*}، یوسف بازرگان لاری^۲

^۱ ایران، تهران، رسالت، خیابان هنگام، خیابان دانشگاه، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده راه آهن، 1684613114، دانشجو

دکتری

^۲ ایران، شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد شیراز، گروه مهندسی مکانیک، استادیار

* پست الکترونیکی نویسنده مسئول: d_kamali@rail.iust.ac.ir

چکیده

در این تحقیق، فرکانس های طبیعی یک نانومیله FGM دارای ترک مورد بررسی قرار گرفته است. در ابتدا با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات آزاد یک نانومیله FGM ترک دار استخراج شده است. سپس با استفاده از روش جدا سازی متغیرها و استفاده از روش اختلاف محدود، این معادلات به معادلات جبری تبدیل و برای بدست آوردن فرکانس های طبیعی حل شده اند. در انتها نیز با حل مثال های عددی، اثر تغییر پارامترهای مختلف بر روی فرکانس های طبیعی مطالعه و کارایی مدل ارائه شده، نشان داده شده است. فرمولبندی ارائه شده در این تحقیق، مدل ساده ای است که به سادگی قابل کدنویسی بوده و با استفاده از آن می توان اثر تغییر پارامترهای مختلف تاثیر گذار بر فرکانس های طبیعی را بررسی کرد. نتایج مثال ها، تایید کننده این مطلب است که با رصد فرکانس های طبیعی یک نانومیله FGM، می توان به وجود ترک در آن پی برد.

کلمات کلیدی

ارتعاشات آزاد؛ ترک؛ نانومیله؛ FGM

۱- مقدمه:

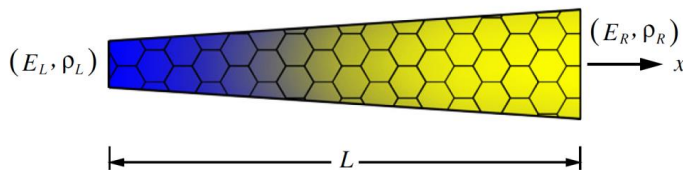
در دهه اخیر، استفاده از نانومیله ها در صنایع و علوم مختلف گسترش یافته است. از جمله کاربرد نانومیله ها میتوان به استفاده از آنها در صفحه های نمایش، سنسورهای گازی، ابزارهای پزشکی، و کاربردهای محیط زیست اشاره کرد. در نانومیله های FGM، تغییر تدریجی در ترکیب شیمیایی و ساختاری، منجر به تغییرات تدریجی در خواص مختلفشان مثل چگالی و مدول الاستیسیته میگردد. اثرات محیطی مانند تغییرات دما، ارتعاشات و ضربه، احتمال ایجاد ترک و آسیب در وسایل با ابعاد نانو را افزایش می دهند. این ترک ها و آسیب ها، بر ایمنی و قابلیت اطمینان سیستم اثر سوء می گذارند و شناسایی آنها از اهمیت زیادی برخوردار است. در همین راستا، موراسی [1] در سال ۲۰۰۱ به شناسایی یک ترک در یک میله بر اساس تغییرات فرکانس طبیعی پرداخته است. آیدوگلو [2] ارتعاشات محوری یک نانومیله بدون ترک را با استفاده از الاستیسیته غیر موضعی بررسی کرده است. هسو و همکاران

[3] ارتعاشات یک نانوتیر همگن ترک دار را در سال ۲۰۱۱ بررسی کرده اند. سیمسک [4] ارتعاشات آزاد یک نانومیله FGM مخروطی بدون ترک را، بر اساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی مورد بررسی قرار داده است. اکگز و سیوالک [5]، با استفاده از تئوری گرادیان کرنش، ارتعاشات آزاد طولی میکرو میله های FGM را بررسی کرده اند. اکباس [6] در سال ۲۰۱۹، ارتعاشات اجباری یک نانومیله ترک دار تحت اثر یک نیروی هارمونیک را بررسی کرده است.

در ادامه تحقیقات اشاره شده در بالا، این پژوهش به بررسی تاثیر پارامترهای مختلف مانند مکان ترک، ضریب فنریت ترک و خصوصیات مواد، بر روی فرکانس های طبیعی یک نانومیله FGM ترک دار پرداخته است. در ابتدا، با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات آزاد یک نانومیله FGM ترک دار استخراج شده است. سپس با استفاده از تکنیک جداسازی متغیرها و استفاده از روش عددی اختلاف محدود، معادلات دیفرانسیل حاکم به معادلات جبری تبدیل و در جهت بدست آوردن فرکانس های طبیعی حل شده اند. در انتها نیز با حل مثال های عددی مختلف، اثر تغییر پارامترهای مختلف بر روی فرکانس های طبیعی، مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲- فرمولبندی مساله:

یک نانومیله FGM به طول L مطابق شکل (۱) در نظر میگیریم:



شکل ۱: یک نانومیله FGM دارای خصوصیات تابعی طولی [4]

بر اساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی (Nonlocal Elasticity)، ارتباط بین تنش و کرنش در میله شکل (۱)، بدون در نظر گرفتن نیروی حجمی، به صورت زیر خواهد شد [7]:

$$\sigma_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

که σ_{xx} معرف تنش محوری، ε_{xx} معرف کرنش محوری، u بیان کننده میدان جابه جایی، E مدول یانگ و پارامتر $e_0 a$ با بعد طول، یک ضریب مقیاس است که نشان دهنده اثر مقیاس های کوچک بر روی پاسخ ساختارهای نانو اندازه است. با استفاده از رابطه (۱) و انجام محاسباتی، می توان با استفاده از رابطه (۲) به معادله حاکم بر ارتعاشات آزاد محوری یک نانو میله FGM رسید [4]:

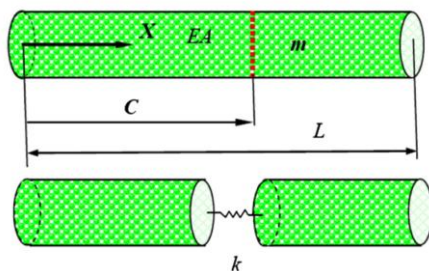
$$\frac{\partial}{\partial x} \left[E(x)A(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] - \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \right] = 0 \quad (2)$$

که ρ چگالی، A سطح مقطع میله و t معرف زمان است. در این مقاله، تغییرات مدول یانگ و چگالی نانو میله، بصورت توابع محوری زیر در نظر گرفته شده اند:

$$\begin{aligned} E(\tilde{x}) &= E_L F_E(\tilde{x}), \quad F_E(\tilde{x}) = E_L [(1 - E_r)(1 - \tilde{x})^{n_0} + E_r] \\ \rho(\tilde{x}) &= \rho_L F_\rho(\tilde{x}), \quad F_\rho(\tilde{x}) = \rho_L [(1 - \rho_r)(1 - \tilde{x})^{n_0} + \rho_r] \quad (3) \\ 0 \leq \tilde{x} &= \frac{x}{L} \leq 1, \quad n_0 \geq 1, \quad E_r = \frac{E_R}{E_L}, \quad \rho_r = \frac{\rho_R}{\rho_L} \end{aligned}$$

که اندیس L و اندیس R به ترتیب مربوط به مقدار خصوصیت مورد نظر در انتهای چپ و انتهای راست نانومیله می باشد (شکل (1)).

حال اثر ترک را وارد معادلات بالا خواهیم کرد. مطابق با شکل (2)، ترک در میله را می توان بصورت یک فنر خطی با ثابت k مدل کرد [1] که مقدار k به هندسه ترک، مانند عمق ترک، وابسته بوده و حالت بدون ترک را می توان با $k \rightarrow \infty$ مدل کرد.



شکل 2: مدل کردن ترک بصورت یک فنر خطی [1]

با توجه به رابطه (2) و با در نظر گرفتن سطح مقطع ثابت A برای میله خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial}{\partial x} \left[E(x) \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} \right] - \rho(x)A \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} + A(e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\rho(x) \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} \right] = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4) \\ (0 \leq x < C \text{ for } i = 1) \text{ and } (C < x \leq L \text{ for } i = 2) \end{aligned}$$

که C مکان ترک می باشد.

در این مقاله شرط مرزی حاکم بر نانومیله را یک سر گیر-یک سر آزاد در نظر گرفته ایم و شرایط مرزی زیر را برای معادلات (4) خواهیم داشت:

$$u_1(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u_2(L,t)}{\partial x} = 0$$

$$k[u_2(C,t) - u_1(C,t)] = EA \frac{\partial u_1(C,t)}{\partial x} + A(e_0 a)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho \frac{\partial^2 u_1(C,t)}{\partial t^2} \right] \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_1(C,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_2(C,t)}{\partial x}$$

که شرایط سوم و چهارم مربوط به مکان ترک هستند [1].

با توجه به اینکه به دنبال تعیین فرکانس های طبیعی می باشیم و با توجه به روش جداسازی متغیرها، روابط زیر را در نظر می گیریم:

$$u_1(x,t) = u(x) \exp(i\omega t), \quad u_2(x,t) = v(x) \exp(i\omega t) \quad (6)$$

با ترکیب روابط بالا و پس از ساده سازی، به روابط زیر برای ارتعاشات آزاد یک نانو میله FGM ترک دار می رسمیم:

$$(F_E - \mu^2 \lambda^2 F_\rho) \tilde{u}'' + (F'_E - 2\mu^2 \lambda^2 F'_\rho) \tilde{u}' + (\lambda^2 F_\rho - \mu^2 \lambda^2 F''_\rho) \tilde{u} = 0 \quad 0 \leq \tilde{x} < b$$

$$(F_E - \mu^2 \lambda^2 F_\rho) \tilde{v}'' + (F'_E - 2\mu^2 \lambda^2 F'_\rho) \tilde{v}' + (\lambda^2 F_\rho - \mu^2 \lambda^2 F''_\rho) \tilde{v} = 0 \quad b < \tilde{x} \leq 1 \quad (7)$$

$$\tilde{u}(0) = 0, \quad \tilde{v}'(1) = 0$$

$$(\tilde{k} \mu^2 \lambda^2 F_\rho - \tilde{k} F'_E) \tilde{u}' + (\tilde{k} \mu^2 \lambda^2 F'_\rho - 1) \tilde{u} + v = 0, \quad \tilde{u}' = \tilde{v}' \quad \text{at} \quad \tilde{x} = b$$

$$\mu = \frac{e_0 a}{L}, \quad \tilde{k} = \frac{AE_L}{kL}, \quad \lambda^2 = \frac{\rho_L L^2 \omega^2}{E_L}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{L}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{L}, \quad b = \frac{C}{L}$$

لازم بذکر است که در تمام روابط بالا، مشتق گیری ها نسبت به متغیر \tilde{x} می باشند.

با حل معادلات (7)، می توان به فرکانس های طبیعی یک نانو میله FGM ترک دار دست یافت. در این تحقیق، با توجه به نوع این معادلات که معادلاتی معمولی، خطی و از مرتبه ۲ هستند، از روش اختلاف محدود (FDM) برای حل آنها استفاده می شود. در محدوده $0 \leq \tilde{x} \leq b$ ، n نقطه $\tilde{x}_i = (i-1)h_1 \quad i=1,2,\dots,n$ با فاصله های مساوی h_1 و در محدوده $b \leq \tilde{x} \leq 1$ ، m نقطه $\tilde{x}_j = b + (j-1)h_2 \quad j=1,2,\dots,m$ با فاصله های مساوی h_2 در نظر می گیریم. با استفاده از روش اختلاف محدود مرکزی، و با انجام محاسباتی، رابطه های (7) به فرم زیر تبدیل می شوند:

$$\begin{aligned}
 & [G_1 - G_2]_i \tilde{u}_{i-1} + [\lambda^2 F_\rho - \mu^2 \lambda^2 F_\rho'' - 2G_1]_i \tilde{u}_i + [G_1 + G_2]_i \tilde{u}_{i+1} = 0 \quad i = 2, \dots, n \\
 & \tilde{u}_1 = 0, \quad \tilde{u}_{n+1} = \frac{-2h_1}{(\tilde{k}\mu^2\lambda^2 F_\rho - \tilde{k}F_E)_{i=n}} [(\tilde{k}\mu^2\lambda^2 F_\rho' - 1)_{i=n} \tilde{u}_n + \tilde{v}_1] + \tilde{u}_{n-1} \\
 & [H_1 - H_2]_j \tilde{v}_{j-1} + [\lambda^2 F_\rho - \mu^2 \lambda^2 F_\rho'' - 2H_1]_j \tilde{v}_j + [H_1 + H_2]_j \tilde{v}_{j+1} = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (8) \\
 & \tilde{v}_0 = \frac{2h_2}{(\tilde{k}\mu^2\lambda^2 F_\rho - \tilde{k}F_E)_{j=1}} [(\tilde{k}\mu^2\lambda^2 F_\rho' - 1)_{j=1} \tilde{u}_n + \tilde{v}_1] + \tilde{v}_2, \quad \tilde{v}_{m+1} = \tilde{v}_{m-1} \\
 & G_1 = \frac{F_E - \mu^2 \lambda^2 F_\rho}{h_1^2}, G_2 = \frac{F_E' - 2\mu^2 \lambda^2 F_\rho'}{2h_1}, H_1 = \frac{F_E - \mu^2 \lambda^2 F_\rho}{h_2^2}, H_2 = \frac{F_E' - 2\mu^2 \lambda^2 F_\rho'}{2h_2}
 \end{aligned}$$

رابطه های (8)، روابط گسسته سازی شده هستند که می توان آنها را بصورت یک دستگاه ماتریسی نوشت که ماتریس ضرائب شامل پارامتر λ^2 می باشد. می دانیم که برای بدست آوردن جواب های غیربديهی برای دستگاه تشکیل شده، باید دترمینان ماتریس ضرائب را صفر قرار دهیم. با این کار می توانیم به مقادیر فرکانس های طبیعی ارتعاشات یک نانوميله FGM ترک دار برسیم. در قسمت بعد، با حل مثال های عددی، صحت روابط بررسی خواهد شد.

۳- مثال های عددی:

در مثال اول، یک نانوميله همگن ترک دار و در مثال دوم، یک نانوميله FGM ترک دار بررسی شده است. در هر دو مثال، تاثیر تغییر در پارامترهای مختلف بر فرکانس های طبیعی مطالعه شده است. لازم به ذکر است که در کل این قسمت، هر کجا که صحبت از فرکانس طبیعی شده است، منظور فرکانس طبیعی بدون بعد شده λ می باشد.

۳-۱ فرکانس های طبیعی یک نانوميله همگن ترک دار

در حالت اول، از پارامترهای بدون بعد زیر استفاده شده است:

$$\mu = \frac{e_0 a}{L} = 0, \quad \tilde{k} = \frac{AE_L}{kL} = 0.1144, \quad b = \frac{C}{L} = 0.2002, \quad E_r = 1, \quad \rho_r = 1 \quad (9)$$

نتایج بدست آمده برای فرکانس های سه مد اول، در جدول (۱) آورده شده است. همانطور که از جدول (۱) دیده می شود، تطابق خوبی بین نتایج تحقیق حاضر و مرجع [6] وجود دارد.

جدول ۱: فرکانس های طبیعی اول تا سوم، نانوميله همگن ترک دار

مد	مرجع [6]	مطالعه حاضر ($n=5, m=21$)	مطالعه حاضر ($n=10, m=42$)
1	1.4278	1.4276	1.4276
2	4.5576	4.5510	4.5563
3	7.8540	7.8181	7.8458

در حالت دوم، با در نظر گرفتن پارامتر مقیاس، اثر تغییر ضریب فنریت ترک مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت، از پارامترهای بدون بعد زیر استفاده شده است:

$$\mu = 0.1, b = 0.5, E_r = 1, \rho_r = 1 \quad (10)$$

همانطور که در جدول (۲) دیده می‌شود، افزایش \tilde{k} (کاهش k ترک) باعث کاهش فرکانس طبیعی خواهد شد که این مساله بدلیل افزایش انعطاف پذیری ترک و دورتر شدن از حالت بدون ترک می‌باشد. این نتایج نشان می‌دهد که با رصد فرکانس طبیعی اول، می‌توان به وجود عیوبی مانند ترک پی برد.

جدول ۲: تغییر فرکانس طبیعی اول نسبت به ضریب فنریت ترک، نانو میله همگن ترک دار

\tilde{k}	مرجع [6]	مطالعه حاضر ($n=6, m=6$)	مطالعه حاضر ($n=16, m=16$)
0.1	1.4812	1.4801	1.4810
0.5	1.2582	1.2580	1.2582
0.8	1.1385	1.1385	1.1385

۳-۲ فرکانس های طبیعی یک نانومیله FGM ترک دار

در حالت اول، پارامترهای زیر در نظر گرفته شده و اثر تغییرات E_r بر روی فرکانس های طبیعی مطالعه و در جدول (۳) آورده شده است.

$$\mu = 0, \tilde{k} = 0.5, b = 0.4, n_0 = 1, \rho_r = 1, h_1 = h_2 = 0.05 \quad (11)$$

در این حالت، نتایج بدست آمده از مطالعه حاضر با نتایج بدست آمده از نرم افزار انسیس مقایسه شده است. همانطور که انتظار می‌رود، با افزایش E_r ، فرکانس های طبیعی افزایش می‌یابد که ناشی از افزایش تدریجی سفتی نانومیله می‌باشد. در شبیه سازی انسیس، $L=1, E_L=1, \rho_L=1$ در نظر گرفته شده، میله با استفاده از المان link180 گسسته سازی و ترک بصورت یک المان فنر خطی با طول کوچک 0.05 متر مدل شده است. لازم به ذکر است که در انسیس، نمی‌توان اثر پارامتر مقیاس را وارد کرد و امکان تعریف FGM نیز بصورت مستقیم وجود ندارد و خصوصیت مواد برای هر المان، بصورت میانگین خصوصیت در دو سر المان در نظر گرفته شده است. همچنین، در انسیس تغییر پارامترهای مختلف، مثل تغییر در مکان ترک، بسادگی قابل انجام نیست. در مدل ارائه شده در این تحقیق، این محدودیت ها وجود ندارد و فرمول ارائه شده در این تحقیق نسبت به شبیه سازی در انسیس برتری دارد.

جدول ۳: تغییر فرکانس های طبیعی نسبت به پارامتر E_r ، نانو میله FGM ترک دار

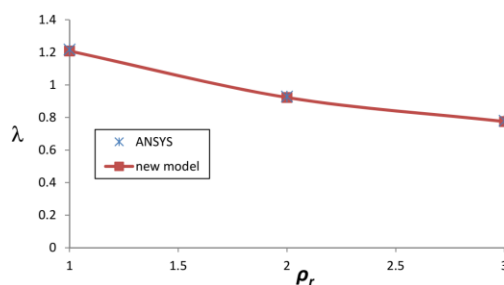
مد	مرجع جواب	$E_r = 1$	$E_r = 2$	$E_r = 3$
1	انسیس	1.2174	1.3004	1.3560
	مطالعه حاضر	1.2082	1.2913	1.3469

2	انسیس	4.5438	4.9360	5.1595
	مطالعه حاضر	4.4854	4.8810	5.1073
3	انسیس	6.0392	7.4135	8.5998
	مطالعه حاضر	5.9746	7.3307	8.4958

در حالت دوم از مثال دوم، پارامترهای زیر در نظر گرفته شده است:

$$\mu = 0, \tilde{k} = 0.5, b = 0.4, n_0 = 1, E_r = 1, h_1 = h_2 = 0.05 \quad (12)$$

در این حالت، اثر تغییرات پارامتر ρ_r بر روی فرکانس طبیعی اول مطالعه و در شکل (3) آورده شده است.



شکل 3: اثر تغییر ρ_r بر روی فرکانس طبیعی اول

همانطور که انتظار می‌رود، با افزایش ρ_r ، فرکانس طبیعی اول کاهش می‌یابد که ناشی از افزایش تدریجی جرم در طول نانومیله می‌باشد.

در حالت آخر نیز، اثر تغییرات پارامتر μ بر روی فرکانس‌های طبیعی مطالعه و در جدول (6) آورده شده است. در این حالت، پارامترهای زیر در نظر گرفته شده است.

$$\tilde{k} = 0.5, b = 0.4, n_0 = 1, E_r = 2, \rho_r = 2, h_1 = h_2 = 0.05 \quad (13)$$

همانطور که در جدول (6) مشاهده می‌شود، با افزایش μ ، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و این اختلاف مقادیر، نشان دهنده تفاوت استفاده از دو تئوری الاستیسیته موضعی و غیر موضعی می‌باشد.

جدول 6: تغییر فرکانس‌های طبیعی نسبت به پارامتر μ ، نانو میله FGM ترک دار

مد	$\mu = 0$	$\mu = 0.1$	$\mu = 0.2$
1	0.9887	0.9883	0.9870
2	4.2498	3.9427	3.3049
3	5.7643	5.0916	3.9361

4- نتیجه گیری:

در این تحقیق، ارتعاشات آزاد یک نانومیله FGM ترک دار، مورد بررسی قرار گرفت. مدول یانگ و چگالی نانو میله، بصورت توابعی از مختصات طولی نانو میله در نظر گرفته شدند. در استخراج معادلات حاکم، از تئوری الاستیسیته غیرموضعی استفاده گردید و اثر مقیاس وارد روابط شد. در مدل ارائه شده، از پارامترهای بدون بعد استفاده شده و با استفاده از روش اختلاف محدود، معادلات دیفرانسیل حاکم به معادلات جبری تبدیل شده اند. نتایج مثال های عددی، نشان دهنده کارایی و دقت مدل ارائه شده در این تحقیق است. مدل ارائه شده در این تحقیق، مدل ساده ای است که با استفاده از آن می توان اثر تغییر پارامترهای مختلفی مثل مکان ترک، ضریب فنریت ترک، تابع مدول یانگ و تابع چگالی را بر روی فرکانس های طبیعی نانو میله بررسی کرد. در حالیکه، در مدل سازی چنین مساله ای در نرم افزارهای المان محدود، مانند انسیس، با محدودیت های مختلفی مواجه می شویم و تغییر در پارامترهای تاثیر گذار بر فرکانس های طبیعی، بسادگی مدل ارائه شده در این تحقیق نیست.

مراجع:

- [1] A. Morassi, "Identification of a crack in a rod based on changes in a pair of natural frequencies", *Journal of Sound and Vibration*, 242, 4, 2001, 577-596
- [2] M. Aydogdu, "Axial vibration of the nanorods with the nonlocal continuum rod model", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 41, 5, 2009, 861-864
- [3] J.C Hsu, H.L Lee, W.J Chang, "Longitudinal vibration of cracked nanobeams using nonlocal elasticity theory", *Current Applied Physics*, 11, 6, 2011, 1384-1388
- [4] M. Şimşek, "Nonlocal effects in the free longitudinal vibration of axially functionally graded tapered nanorods", *Computational Materials Science*, 61, 2012, 257-265
- [5] B. Akgöz, Ö. Civalek, "Longitudinal vibration analysis of strain gradient bars made of functionally graded materials (FGM)", *Composites Part B: Engineering*, 55, 2013, 263-268
- [6] Ş.D Akbaş, "Axially Forced Vibration Analysis of Cracked a Nanorod", *Journal of Computational Applied Mechanics*, 50, 1, 2019, 63-68
- [7] A.C Eringen, "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", *Journal of Applied Physics*, 54, 1983, 4703-4710