

## تحلیل ارتعاشات آزاد وابسته به اندازه یک میکرو ورق ضخامت متغیر با لایه‌های پیزوالکتریک هدفمند تحت گرادیان دما

مریم محمدجانی<sup>۱</sup>، محسن تقی‌زاده<sup>۲\*</sup>، امیر رضا عسکری<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> ایران، سبزوار، دانشگاه حکیم سبزواری، دانشکده فنی مهندسی، دانشجوی دکترای تخصصی

<sup>۲</sup> ایران، سبزوار، دانشگاه حکیم سبزواری، دانشکده فنی مهندسی، استادیار

<sup>۳</sup> انگلستان، هادرزفیلد، دانشگاه هادرزفیلد، دانشکده فنی مهندسی، استادیار

\*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: [m.taghizadeh@hsu.ac.ir](mailto:m.taghizadeh@hsu.ac.ir)

### چکیده

هدف این مقاله بررسی میزان وابستگی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده یک میکرو صفحه میدلین ضخامت متغیر به ابعاد آن و گرادیان دما، هنگام ترکیب شدن آن با لایه‌های مدرج تابعی پیزوالکتریک است. المان پیشنهادی یک المان مستطیلی چهار گرهی نامنطبق است که دارای ۱۵ درجه آزادی در هر گره و از مرتبه پیوستگی ضعیف  $C_1$  می‌باشد. انرژی میکرو ورق بر اساس تئوری مرتبه اول برشی و تئوری تنش کوپل بهبودیافته و با استفاده از توابع شکل چندجمله‌ای تقریب زده می‌شود. در ادامه، با استفاده از روش اجزاء محدود، معادلات میکرو ورق میدلین گسسته می‌شود. یافته‌های حاضر با نتایج موجود در ادبیات مقایسه و با موفقیت تأیید می‌شوند. سپس یک مطالعه دقیق برای نشان دادن تأثیر عملکرد لایه‌های مدرج تابعی پیزوالکتریک و اثر افزایش حرارت بر فرکانس طبیعی سیستم انجام می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد که برای تمام مقادیر اندیس تابع توانی، فرکانس طبیعی با افزایش دما به دلیل کاهش سفتی، کاهش می‌یابد، که میزان این کاهش فرکانس برای شرایط مرزی چهارطرف ساده بیشتر از چهارطرف گیردار است. به علاوه نتایج نشان می‌دهد که با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول و همچنین با افزایش نسبت نازک‌شدگی صفحه، فرکانس طبیعی بی‌بعد شده سیستم افزایش می‌یابد.

**کلمات کلیدی:** میکرو صفحه میدلین؛ اجزاء محدود؛ مواد مدرج تابعی پیزوالکتریک؛ ضخامت متغیر.

### ۱- مقدمه

مواد پیزوالکتریک به دلیل دارا بودن خواص مکانیکی و الکتریکی هم زمان، کاربرد بسیار گسترده‌ای در حسگرها و محرک‌های میکروالکترومکانیکی پیدا کرده‌اند [۱]. اخیراً استفاده از مواد هدفمند به ویژه در محیط‌های تحت تنش شدید و تنش‌های حرارتی بالا توجه زیادی را به خود جلب کرده است. مواد مدرج تابعی مواد ناهمگنی هستند که خواصشان به طور مداوم در یک یا چند جهت تغییر می‌کند [۲]. ساختار مواد مدرج تابعی معمولاً با تغییر تدریجی ترکیب مواد تشکیل دهنده آن‌ها در راستای ضخامت به دست می‌آید.

تاکنون مطالعات گسترده‌ای در مورد طیف وسیعی از موضوعات مرتبط با مواد مدرج تابعی ارائه شده است. پراوین و ردی [۲] پاسخ استاتیکی و دینامیکی غیرخطی صفحات سرامیکی\_فلزی هدفمند را با استفاده از روش اجزاء محدود و در نظر گرفتن کرنش‌های برشی عرضی، اینرسی دورانی و چرخش‌های نسبتاً بزرگ بررسی کردند. پاندا و ری [۳] یک تحلیل اجزاء محدود استاتیکی غیرخطی از صفحات مدرج تابعی در راستای ضخامت در حضور یا عدم حضور محیط حرارتی ارائه کردند. این مدل بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و کرنش غیرخطی فون کارمن ارائه شد. شایان ذکر است که مواد مدرج تابعی دارای استحکام بالا و سبک هستند، به علاوه، از مزیت مقاومت در محیط‌هایی با گرادیان دمای بالا برخوردار بوده و در مقایسه با صفحات چند لایه، تنش‌های مکانیکی و حرارتی کمتری در آنها ایجاد می‌شود. در ادامه چند نمونه از مطالعات اثرات حرارتی بر روی صفحات مدرج تابعی بیان می‌گردد. یانگ و شن [۴ و ۵] پاسخ دینامیکی خطی و ارتعاشی صفحات مدرج تابعی نازک و نسبتاً ضخیم را تحت تنش و در دمای ثابت با استفاده از روش ربع دیفرانسیل بررسی کردند. لی و همکارانش [۶] ارتعاشات آزاد خطی سه‌بعدی صفحات مستطیلی را در محیط‌های حرارتی مورد مطالعه قرار دادند. نوع دیگری از مواد مدرج تابعی به نام مواد مدرج تابعی پیزوالکتریک<sup>۱</sup> در سال‌های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده است. سازه‌های هوشمند یا عناصر ساخته شده از مواد مدرج تابعی پیزوالکتریک معمولاً نسبت به حسگرها و محرک‌های معمولی که اغلب از مواد تک‌شکل<sup>۲</sup>، دوشکل<sup>۳</sup> و چندشکل<sup>۴</sup> ساخته می‌شوند، برتری دارند. برای صفحه‌ای پیزوالکتریک با خواص مواد همگن در لایه‌ها، کرنش‌های خمشی زیاد، تنش‌های بزرگ و شکست ناشی از جداسازی سطحی، معمولاً در فصل مشترک لایه‌ها تحت بارگذاری‌های مکانیکی یا الکتریکی رخ می‌دهد. برای کاهش این عیوب، مواد و سازه‌های پیزوالکتریک با ویژگی‌های ماده هدفمند در جهت ضخامت لایه، معرفی و ساخته شده‌اند [۷]. در ادامه به تعدادی از مقالات در این زمینه اشاره می‌شود. لو و همکارانش [۸] روش جدیدی را برای استخراج معادلات دقیق یک صفحه پیزوالکتریک مستطیلی هدفمند با یک روش نیمه تحلیلی ارائه کردند. بهجت و همکارانش [۹] یک مطالعه جامع در مورد پاسخ ارتعاش استاتیکی، دینامیکی و آزاد پانل‌های مدرج تابعی پیزوالکتریک، با استفاده از روش اجزاء محدود، تحت مجموعه‌های مختلف بارگذاری‌های مکانیکی، حرارتی و الکتریکی ارائه کردند. با وجود تمام تحقیقات صورت گرفته، مشاهده می‌شود حسگرهای مبتنی بر میکرو صفحه‌های مدرج تابعی پیزوالکتریک و ضخامت متغیر، تاکنون کمتر مورد بررسی قرار گرفته است. از طرفی با توجه به کاربرد بسیار گسترده مواد پیزوالکتریک هدفمند در حسگرهای میکروالکترومکانیکی، هدف اصلی مقاله پیش رو، تحلیل ارتعاشات آزاد وابسته به اندازه یک میکرو صفحه ضخامت متغیر با لایه‌های پیزوالکتریک هدفمند، تحت گرادیان دما می‌باشد. بدین منظور سایر قسمت‌های پژوهش حاضر به صورت زیر سازمان یافته‌اند. بخش دوم به صورت خلاصه به مرور تئوری تنش کوپل بهبودیافته می‌پردازد. دلیل استفاده از تئوری تنش کوپل بهبود یافته [۱۰] دقت بالا و در عین حال سادگی تعیین پارامتر مقیاس طول آن می‌باشد. شایان ذکر است که تئوری‌های گرادیان کرنش و تنش کوپل بهبود یافته به ترتیب از ۳ و ۱ ثابت مادی علاوه بر ثوابت لامه برای توصیف رفتار وابسته به بعد مواد همسان‌گرد استفاده می‌کنند. در حالت کلی، تئوری‌های تنش کوپل حالت ساده شده‌ای از تئوری‌های گرادیان کرنش که بر اساس فرضیه‌ی دخالت مشتق مرتبه اول تانسور کرنش در انرژی کرنشی بدست آمده‌اند، می‌باشند. بر اساس تئوری تنش کوپل بهبود یافته، یک ذره مادی در اثر اعمال یک بارگذاری دلخواه، در یک مقیاس مشخص دچار دوران و انتقال می‌شود. بنابراین در تئوری تنش کوپل بهبود یافته، انرژی کرنشی علاوه بر تانسور کرنش، شامل تانسور انحنا نیز می‌باشد. مهم‌ترین مزیت تئوری تنش کوپل بهبود یافته نسبت به سایر تئوری‌های غیرکلاسیک، در بر گرفتن تنها یک پارامتر مقیاس طول مادی به منظور لحاظ کردن اثر اندازه سیستم می‌باشد. به دلیل وجود این ویژگی تئوری تنش کوپل بهبود یافته مدل‌سازی‌های دقیق‌تری را در مقایسه با تئوری کلاسیک مکانیک محیط پیوسته ارائه می‌دهد.

در بخش سوم با معرفی میدان جابجایی، معادلات حاکم میکرو صفحه مستطیلی ضخامت متغیر با لایه‌های پیزوالکتریک هدفمند استخراج می‌گردند و همچنین با بخدمت گرفتن روش اجزاء محدود، مدل کاهیده شده میکرو صفحه حاضر استخراج می‌شود. یافته‌های حاصل از مدل ارائه شده در این مقاله در بخش چهارم با نتایج گزارش شده در پژوهش‌های پیشین مقایسه و صحت‌گذاری می‌شوند. در این قسمت همچنین اثر تغییرات دما بر فرکانس طبیعی میکرو صفحه همگن مجهز شده به لایه‌های مدرج تابعی پیزوالکتریک و

<sup>1</sup>Functionally graded piezoelectric material

<sup>2</sup>Uni-Morph

<sup>3</sup>Bi-Morph

<sup>4</sup>Multimorph

همچنین اثر افزایش نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول مادی میکرو صفحه همگن با لایه‌های مدرج تابعی پیزوالکتریک بررسی می‌گردد. همچنین اثر تغییرات ضخامت ورق بر فرکانس طبیعی آن نیز در این بخش مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

## ۲- مروری بر تئوری تنش کوپل بهبود یافته

بر اساس تئوری تنش کوپل بهبود یافته، انرژی کرنشی علاوه بر تانسور کرنش (که مزدوج تانسور تنش است)، شامل تانسور انحنا (که مزدوج بخش انحرافی تانسور تنش کوپل است) نیز می‌باشد. از این جهت در تغییر شکل‌های کوچک یک ماده الاستیک خطی، انرژی کرنشی در اثر اعمال بارگذاری خارجی به صورت رابطه (۱) بیان می‌گردد [۱۰].

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dv, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

که در آن  $U$ ،  $\sigma_{ij}$ ،  $\varepsilon_{ij}$ ،  $m_{ij}$  و  $\chi_{ij}$  به ترتیب تانسور تنش کوشی، تانسور کرنش، بخش انحرافی تانسور تنش کوپل و تانسور انحنای متقارن، می‌باشند.

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - e_{ij} E_i, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

$$m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij}, \quad (4)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}). \quad (5)$$

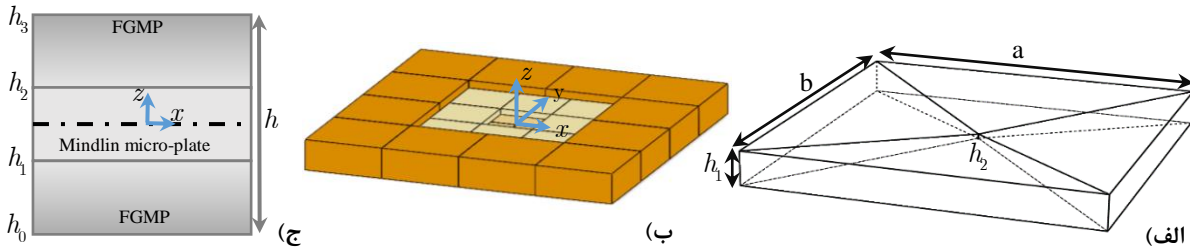
که در روابط فوق  $u$  بردار جابجایی،  $\theta$  بردار چرخش،  $\mu$  مدول برشی ماده و  $l$  پارامتر مقیاس طول مادی نامیده می‌شوند. همچنین  $\lambda$  و  $\mu$  به عنوان ثوابت لامه شناخته می‌شوند.

لازم به ذکر است، رابطه مؤلفه‌های بردار چرخش و مؤلفه‌های بردار جابجایی به قرار زیر می‌باشد که در این رابطه  $e$  نماد جایگشت است.

$$\theta_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j}. \quad (6)$$

## ۳- معادلات حاکم بر مسأله

شکل ۱ شماتیکی از یک مدل میکرو ورق مستطیلی ضخامت متغیر با لایه‌های پیزوالکتریک هدفمند تحت گرادیان دما را نشان می‌دهد. مطابق این شکل میکرو ورق مستطیلی ضخامت متغیر حاضر دارای طول  $a$ ، عرض  $b$  و بیشترین ضخامت ورق در کناره‌ها  $h_1$  و کمترین ضخامت آن در وسط  $h_2$  می‌باشد. همچنین هر المان از این میکرو ورق، از یک هسته سیلیکونی و دو لایه پیزوالکتریک مدرج تابعی در بالا و پایین آن تشکیل می‌شود. لایه‌های پیزوالکتریک مدرج تابعی از اختلاط سیلیکون و یک ماده پیزوالکتریک، بدست می‌آیند، بگونه‌ای که در قسمت اتصال با هسته، دارای خواص سیلیکون و در سطح آزاد ورق دارای خواص پیزوالکتریک می‌باشند. لازم به ذکر است که در این مطالعه تغییرات ضخامت به صورت خطی از رئوس تا مرکز فرض شده است.



شکل ۱. میکرو ورق مستطیلی ضخامت متغیر با لایه‌های پیزوالکتریک هدفمند. (الف) شماتیک سه بعدی، (ب) نحوه المان بندی، (ج) شماتیک المان خواص مکانیکی هر المان در میکرو ورق مستطیلی ضخامت متغیر با لایه‌های پیزوالکتریک هدفمند حاضر، در راستای ضخامت بر اساس قانون توانی تغییر می‌کند. طبق این قانون خواص مؤثر این میکرو ورق، به طریق زیر می‌باشد.

$$P(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T^1 + P_2T^2 + P_3T^3), \quad (7)$$

$$P(z, T) = P_m(T) + (P_c(T) - P_m(T))V, \quad (8)$$

$$V^{(1)} = \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^n \quad \text{for } z \in [h_0, h_1], \quad (9\text{-الف})$$

$$V^{(2)} = 1 \quad \text{for } z \in [h_1, h_2], \quad (9\text{-ب})$$

$$V^{(3)} = \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^n \quad \text{for } z \in [h_2, h_3], \quad (9\text{-ج})$$

که در آن  $P$  یک خاصیت ماده است، عبارتی پارامتر  $P$  شامل تمامی پارامترهای  $E$  مدول یانگ،  $U$  ضریب پواسون،  $T$  دما،  $\alpha$  ضریب انبساط حرارتی،  $\rho$  چگالی جرم و  $l$  پارامتر مادی مقیاس طول می‌باشد، همچنین  $n$  اندیس تابع توانی میکرو ورق می‌باشد. ثابت‌های  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$  ضرایب وابسته به دما هستند و برای هر ماده منحصر به فرد هستند. با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابجایی یک نقطه دلخواه از صفحه میدلین در دستگاه مختصات کارتزین به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱].

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) - z\varphi_x(x, y, t), \quad (10\text{-الف})$$

$$v(x, y, t) = v_0(x, y, t) - z\varphi_y(x, y, t), \quad (10\text{-ب})$$

$$w(x, y, t) = w_0(x, y, t), \quad (10\text{-ج})$$

که در آن  $u_0, v_0, w_0$  به ترتیب نشان دهنده جابجایی‌های درون صفحه‌ای و عرضی یک نقطه دلخواه واقع بر صفحه میانی میکرو ورق به ترتیب در راستای محورهای مختصات  $(x, y, z)$  هستند. همچنین  $\varphi_x$  و  $\varphi_y$  به ترتیب زوایای چرخش صفحات میانی ورق نسبت به محورهای  $y$  و  $x$  هستند.

با استفاده از معادلات (۳) و (۱۰) روابط کرنش-جابجایی به طریق زیر تقریب زده می‌شوند.

$$\varepsilon_p = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \varphi_{x,x} \\ \varphi_{y,y} \\ \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} \end{Bmatrix} = \varepsilon_0 - z\varepsilon_1, \quad \varepsilon_p^T = \varepsilon_p + \begin{Bmatrix} 0.5(w_{,x})^2 \\ 0.5(w_{,y})^2 \\ w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix}, \quad (11\text{-الف})$$

$$\varepsilon_s = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\varphi_y + w_{,y} \\ -\varphi_x + w_{,x} \end{Bmatrix}. \quad (11\text{-ب})$$

همچنین با کمک معادلات (۵) و (۶) مؤلفه‌های غیر صفر تانسور انحنای متقارن نیز به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$\chi_b = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_z \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 2(w_{,yx} + \varphi_{y,x}) \\ -2(w_{,xy} + \varphi_{x,y}) \\ -2(\varphi_{y,x} - \varphi_{x,y}) \\ (w_{,yy} + \varphi_{y,y}) - (w_{,xx} + \varphi_{x,x}) \end{Bmatrix}, \quad (۱۲-الف)$$

$$\chi_s = \begin{Bmatrix} \chi_{yz} \\ \chi_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} -z(\varphi_{y,xy} - \varphi_{x,yy}) + (v_{0,xx} - u_{0,xy}) \\ -z(\varphi_{y,xx} - \varphi_{x,xy}) + (v_{0,xy} - u_{0,yy}) \end{Bmatrix} = -z\lambda_{\chi_s} + \lambda_m. \quad (۱۲-ب)$$

مؤلفه‌های تانسور تنش کوپل، با استفاده از معادلات (۴) و (۱۲) به قرار زیر حاصل می‌شوند.

$$m_b = \{m_x \quad m_y \quad m_z \quad m_{xy}\}^T = 2Gl^2 \chi_b, \quad m_s = \{m_{yz} \quad m_{xz}\}^T = 2Gl^2 \chi_s. \quad (۱۳)$$

### ۱-۳ انرژی جنبشی و انرژی کرنش الاستیک المان مدرج تابعی پیزوالکتریک

روابط (۱۴) تا (۱۷) به ترتیب انرژی کرنشی، حرارتی، الکتریکی و جنبشی را برای یک المان بیان می‌کنند.

$$U_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}] dv = \frac{1}{2} \int_A [N_x u_{0,x} + N_y v_{0,y} - M_x \varphi_{x,x} - M_y \varphi_{y,y} + N_{xy} (u_{0,y} + v_{0,x}) - M_{xy} (\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}) - N_{yz} (\varphi_y - w_{,y}) - N_{xz} (\varphi_x - w_{,x}) + \frac{1}{2} (\gamma_x (w_{,xy} + \varphi_{x,x}) - \gamma_y (w_{,xy} - \varphi_{x,y}) - \gamma_z \varphi_{y,x} + \gamma_z \varphi_{x,y} \gamma_{yx} (w_{,yy} + \varphi_{y,y}) - \gamma_{yx} (w_{,xx} + \varphi_{x,x}) - \gamma'_{yz} (\varphi_{y,xy} - \varphi_{x,yy}) + \gamma_{yz} (v_{0,xx} - u_{0,xy}) - \gamma'_{xz} (\varphi_{y,xx} - \varphi_{x,xy}) + \gamma_{xz} (v_{0,xy} - u_{0,yy})] dA, \quad (۱۴)$$

$$U_T = \frac{-1}{2} \int_V (\sigma_x + \sigma_y) \alpha(z) \Delta T(z) dv = \frac{-1}{2} \int_A (\Delta T_m (u_{0,x} + v_{0,y} + \frac{1}{2}(w_x^2 + w_y^2)) - \Delta T_b (\varphi_{x,x} + \varphi_{y,y}) + \Delta T_c) dA, \quad (۱۵)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V (D_z E_z) dz dA = \frac{1}{2} \int_V ((e_{31} \varepsilon_x + e_{32} \varepsilon_y + k_{33} E_z + P_3 \Delta T) E_z) dz dA = \frac{1}{2} \int_V ((a_{e31} (u_{0,x}) - b_{e31} (\varphi_{x,x}) + a_{e32} (v_{0,y}) - b_{e32} (\varphi_{y,y}) + K_{33} E_z + P_3 \Delta T) E_z) dA, \quad (۱۶)$$

$$K = \int_t \int_A (m_0 \dot{u}_0^2 - 2m_1 \dot{u}_0 \dot{\varphi}_x + m_2 \dot{\varphi}_x^2 + m_0 \dot{v}_0^2 - 2m_1 \dot{v}_0 \dot{\varphi}_y + m_2 \dot{\varphi}_y^2 + m_0 \dot{w}_0^2) dA dt, \quad (۱۷)$$

که در آن  $N_i, M_i$  ( $i = x, y, xy$ ) و  $\Upsilon_j$  ( $j = x, y, xy, xz, yz$ ) به ترتیب منته‌های تنش و تنش کوپل بوده که مطابق روابط زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{x,x} \\ \varphi_{y,y} \\ \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{e31} \\ 0 & 0 & a_{e32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix}, \quad (۱۸-الف)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{x,x} \\ \varphi_{y,y} \\ \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{e31} \\ 0 & 0 & b_{e32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix}, \quad (۱۸-ب)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{yz} \\ N_{xz} \end{Bmatrix}^T = P \varepsilon_s, \quad (۱۸-ج)$$

$$\{\gamma_x \ \gamma_y \ \gamma_z \ \gamma_{xy}\}^T = 4R\lambda_b, \quad \{\gamma_{yz} \ \gamma_{xz}\}^T = 4(R\lambda_m - F\lambda_{\zeta_s}), \quad \{\gamma'_{yz} \ \gamma'_{xz}\}^T = 4(F\lambda_m - O\lambda_{\zeta_s}), \quad (۵-۱۸)$$

که در آن

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{h_0}^{h_1} \frac{E_1(z)}{1-\nu_1(z)^2} (1, z, z^2) dz + \int_{h_1}^{h_2} \frac{E}{1-\nu^2} (1, z, z^2) dz + \int_{h_2}^{h_3} \frac{E_2(z)}{1-\nu_2(z)^2} (1, z, z^2) dz, \quad (۱۹-الف)$$

$$(A_{12}, B_{12}, D_{12}) = \int_{h_0}^{h_1} \frac{E_1(z)\nu_1(z)}{1-\nu_1(z)^2} (1, z, z^2) dz + \int_{h_1}^{h_2} \frac{E\nu}{1-\nu^2} (1, z, z^2) dz + \int_{h_2}^{h_3} \frac{E_2(z)\nu_2(z)}{1-\nu_2(z)^2} (1, z, z^2) dz, \quad (۱۹-ب)$$

$$(A_{66}, B_{66}, D_{66}) = \int_{h_0}^{h_1} \frac{E_1(z)}{2(1+\nu_1(z))} (1, z, z^2) dz + \int_{h_1}^{h_2} \frac{E}{2(1+\nu)} (1, z, z^2) dz + \int_{h_2}^{h_3} \frac{E_2(z)}{2(1+\nu_2(z))} (1, z, z^2) dz, \quad (۱۹-ج)$$

$$P = \int_{h_0}^{h_1} G_1(z) dz + \int_{h_1}^{h_2} G dz + \int_{h_2}^{h_3} G_2(z) dz, \quad (۵-۱۹)$$

$$(R, F, O) = \int_{h_0}^{h_1} \frac{G_1(z)l(z)^2}{2} (1, z, z^2) dz + \int_{h_1}^{h_2} \frac{Gl^2}{2} (1, z, z^2) dz + \int_{h_2}^{h_3} \frac{G_2(z)l(z)^2}{2} (1, z, z^2) dz, \quad (۵-۱۹)$$

$$(a_{e31}, a_{e32}) = \int_{h_0}^{h_1} (e_{31}(z), e_{32}(z)) dz + \int_{h_2}^{h_3} (e_{31}(z), e_{32}(z)) dz, \quad (۹-۱۹)$$

$$(b_{e31}, b_{e32}) = \int_{h_0}^{h_1} (e_{31}(z), e_{32}(z)) z dz + \int_{h_2}^{h_3} (e_{31}(z), e_{32}(z)) z dz, \quad (۹-ج)$$

$$(K_{33}) = \int_{h_0}^{h_1} k_{33}(z) dz + \int_{h_2}^{h_3} k_{33}(z) dz, \quad (۹-ح)$$

$$\Delta T_m = \int_{h_0}^{h_1} \frac{E_1(z)}{1-\nu_1(z)} \alpha(z) \Delta T(z) dz + \int_{h_1}^{h_2} \frac{E}{1-\nu} \alpha(z) \Delta T(z) dz + \int_{h_2}^{h_3} \frac{E_2(z)}{1-\nu_2(z)} \alpha(z) \Delta T(z) dz, \quad (۱۹-ط)$$

$$\Delta T_b = \int_{h_0}^{h_1} \frac{E_1(z)}{1-\nu_1(z)} \alpha(z) \Delta T(z) z dz + \int_{h_1}^{h_2} \frac{E}{1-\nu} \alpha(z) \Delta T(z) z dz + \int_{h_2}^{h_3} \frac{E_2(z)}{1-\nu_2(z)} \alpha(z) \Delta T(z) z dz, \quad (۱۹-ی)$$

$$\Delta T_c = \int_{h_0}^{h_1} \frac{E_1(z)}{1-\nu_1(z)} \alpha^2(z) \Delta T^2(z) dz + \int_{h_1}^{h_2} \frac{E}{1-\nu} \alpha^2(z) \Delta T^2(z) dz + \int_{h_2}^{h_3} \frac{E_2(z)}{1-\nu_2(z)} \alpha^2(z) \Delta T^2(z) dz. \quad (۱۹-ک)$$

### ۲-۳ حل اجزای محدود ورق میدلین

در این بخش با استفاده از روش اجزای محدود، معادلات میکرو ورق میدلین را گسسته می‌کنیم.

$$u_0(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3, \quad (۲۰)$$

که در آن مقادیر  $a_i$ ، ضرایبی هستند که می‌توانند توسط ۱۲ معادله هم‌زمان تعیین شوند. همچنین پارامترهای  $\nu_0$  و  $\varphi_x$ ،  $w$ ،  $\varphi_y$  نیز به طریق مشابه بدست می‌آیند.

با استفاده از معادله (۲۰)، توابع درون‌یابی جابجایی را می‌توان به صورت زیر تعیین نمود.

$$N_i = (1/8)(1+\zeta_i\zeta)(1+\eta_i\eta)(2+\zeta_i\zeta+\eta_i\eta-\zeta^2-\eta^2), \quad (۲۱-الف)$$

$$N_{ix} = (a/8)\zeta_i(1+\zeta_i\zeta)^2(1+\eta_i\eta)(\zeta_i\zeta-1), \quad (۲۱-ب)$$

$$N_{iy} = (b/8)\eta_i(1+\eta_i\eta)^2(1+\zeta_i\zeta)(\eta_i\eta-1), \quad (۲۱-ج)$$

که در آن  $N_i$ ،  $N_{ix}$  و  $N_{iy}$  توابع درونیابی جابجایی در گره  $i$  هستند. که در آن

$$\zeta = (x - x_c) / a, \quad \eta = (y - y_c) / b, \quad (22)$$

که در آن  $x_c$  و  $y_c$  مرکز المان مستطیلی است. جابجایی المان به کمک جابجایی گره‌ها بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\varphi_x = N_{\varphi_x} d_{e1}, \quad \varphi_y = N_{\varphi_y} d_{e1}, \quad w = N_w d_{e1}, \quad u_0 = N_{u_0} d_{e2}, \quad v_0 = N_{v_0} d_{e2}, \quad (23)$$

که در آن

$$N_{\varphi_x} = N_{u_0} = [N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_{1x} \quad 0 \quad 0 \quad N_{1y} \quad 0 \quad 0 \quad \dots], \quad (24\text{-الف})$$

$$N_{\varphi_y} = N_{v_0} = [0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_{1x} \quad 0 \quad 0 \quad N_{1y} \quad 0 \quad \dots], \quad (24\text{-ب})$$

$$N_w = [0 \quad 0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_{1x} \quad 0 \quad 0 \quad N_{1y} \quad \dots], \quad (24\text{-ج})$$

$$d_{e1} = [\varphi_{x1} \quad \varphi_{y1} \quad w_1 \quad (\varphi_{x,x})_1 \quad (\varphi_{y,x})_1 \quad (w_{,x})_1 \quad (\varphi_{x,y})_1 \quad (\varphi_{y,y})_1 \quad (w_{,x})_1 \quad \dots]^T, \quad (24\text{-د})$$

$$d_{e2} = [u_{01} \quad v_{01} \quad (u_{0,x})_1 \quad (v_{0,x})_1 \quad (u_{0,y})_1 \quad (v_{0,y})_1 \quad \dots]^T. \quad (24\text{-ه})$$

در انتها، فرکانس طبیعی سیستم به طریق زیر حاصل می‌گردد.  $K$  ماتریس سفتی و  $M$  ماتریس جرم را نشان می‌دهند.

$$(K - \omega^2 M) d = 0. \quad (25)$$

#### ۴- نتایج و صحنه‌گذاری

##### ۴-۱ بررسی همگرایی پاسخ‌ها و صحنه‌گذاری نتایج

به منظور بررسی همگرایی نتایج و همچنین صحنه‌گذاری آنها، یک میکرو ورق ساندوچی با هسته همگن آلومینا و لایه‌های هدفمند با خواص آلومینیوم در سطوح ورق با مشخصات مکانیکی و هندسی ارائه شده در مرجع [۱۲] به عنوان معیار مقایسه در نظر گرفته می‌شود. نام‌گذاری‌های (۱-۰-۱)، (۲-۱-۲)، (۱-۱-۱) نسبت ضخامت‌های مختلف لایه‌های مدرج تابعی و صفحه همگن را نشان می‌دهند. با توجه به داده‌های جدول ۱، دیده می‌شود در نظر گرفتن اندازه مش  $10 \times 10$ ، موجب همگرا شدن نتایج با خطایی کمتر از ۱٪ شده که با یافته‌های منتشر شده در مرجع [۱۲] بخوبی مطابقت می‌کنند.

به منظور تاکید بیشتر بر اعتبار نتایج ارائه شده در این مقاله، جدول ۲ یافته‌های مقاله حاضر، با نتایج ارائه شده در مرجع [۱۳] برای میکرو ورق هدفمند تحت گرادیان دما، را مورد مقایسه قرار می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تطابق بسیار خوبی بین نتایج ارائه شده پژوهش حاضر با یافته‌های مرجع [۱۳] ذکر شده وجود دارد.

جدول ۱. همگرایی و صحنه‌گذاری فرکانس طبیعی  $\bar{\omega}$  میکرو ورق مربعی میدلین با هسته آلومینا و دو لایه مدرج تابعی ( $h/a = 0.1$ )

$n = 5$			$n = 1$			$n = 0.5$			
۱-۱-۱	۲-۱-۲	۱-۰-۱	۱-۱-۱	۲-۱-۲	۱-۰-۱	۱-۱-۱	۲-۱-۲	۱-۰-۱	
۱,۰۲۸۲	۰,۹۷۵۲	۰,۹۳۸۹	۱,۳۴۵۰	۱,۲۹۲۴	۱,۲۳۵۶	۱,۵۱۱۴	۱,۴۷۵۸	۱,۴۳۶۱	اندازه مش $8 \times 8$
۱,۰۳۹۱	۰,۹۷۶۲	۰,۹۴۰۱	۱,۳۴۷۱	۱,۲۹۴۴	۱,۲۳۷۱	۱,۵۱۲۹	۱,۴۷۷۷	۱,۴۳۸۲	اندازه مش $10 \times 10$
۱,۰۴۰۵	۰,۹۷۶۸	۰,۹۴۰۷	۱,۳۴۸۴	۱,۲۹۴۸	۱,۲۳۷۹	۱,۵۱۴۱	۱,۴۷۸۷	۱,۴۳۸۹	اندازه مش $12 \times 12$
۱,۰۴۳۵	۰,۹۷۹۶	۰,۹۴۳۱	۱,۳۵۳۳	۱,۳۰۰۰	۱,۲۴۲۹	۱,۵۱۹۲	۱,۴۸۴۱	۱,۴۴۲۰	[۱۲]

جدول ۲. صحنه‌گذاری فرکانس طبیعی با تغییرات دما  $\bar{\omega} = (\alpha a^2/n) \sqrt{\rho_m(1-\nu^2)/E_m}$  برای یک صفحه مدرج تابعی (SUS304/Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>) با نسبت  $(h/a = 0.125, a/b = 0.1)$

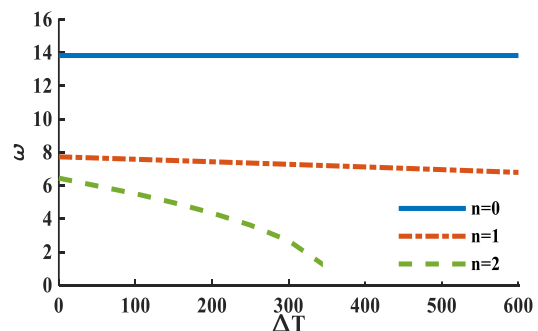
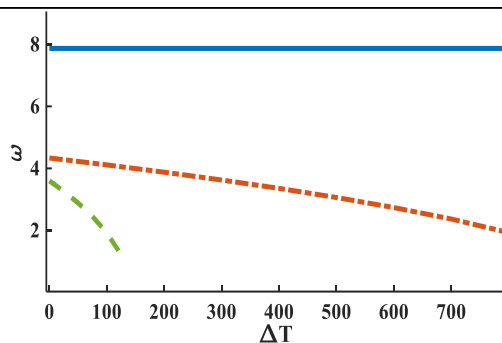
درصد اختلاف	[۱۳]	مقاله حاضر	$n$	دما
۱/۱۴٪	۸,۵۸۸	۸,۴۹۰	۰.۵	$T_m = 300K, T_c = 600K$
۰/۳۶٪	۷,۴۹۷	۷,۴۷۰	۱	
۰/۰۶٪	۶,۷۰۵	۶,۷۰۱	۲	

### ۲-۴ نتایج

به منظور بررسی اثر تغییرات دما بر فرکانس طبیعی میکرو ورق همگن مجهز شده به لایه‌های مدرج تابعی پیزوالکتریک با نسبت ۲-۱-۲، شکل ۲ اثر افزایش دما برای مقادیر مختلف اندیس تابع توانی را به تصویر می‌کشد. مشخصات هندسی و مکانیکی میکرو ورق همگن و خواص لایه‌های مدرج تابعی پیزوالکتریک آن به ترتیب در جدول ۳ داده شده است. همانطور که در شکل ۲ مشاهده می‌گردد، برای تمام مقادیر اندیس تابع توانی  $n$ ، فرکانس طبیعی با افزایش دما به دلیل کاهش سفتی، کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش شاخص کسر حجمی  $n$  و غنی‌تر شدن صفحه مدرج تابعی پیزوالکتریک از فلز، بدلیل کوچکتر بودن مدول یانگ فلز در مقایسه با سرامیک، سفتی ورق کاهش یافته و در نتیجه فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. با مقایسه شکل ۲-الف و ۲-ب مشاهده می‌گردد که درصد کاهش فرکانس با افزایش دما برای صفحه مدرج تابعی پیزوالکتریک با شرایط مرزی چهارطرف ساده بیشتر از چهارطرف گیردار است، این به دلیل ماهیت شرایط مرزی چهارطرف گیردار است (همه درجات آزادی لبه‌ها محدود شده است).

جدول ۳. مشخصات هندسی و مکانیکی میکرو ورق همگن و خواص لایه‌های مدرج تابعی پیزوالکتریک

$e_{32} (\% / m^2)$	$e_{31} (\% / m^2)$	$k_{33} (\% / m)$	$P_3 (\% / m^2 K)$	$K (\% / mK)$	$\alpha (\mu / K)$	$\nu$	$\rho (\text{kg} / m^3)$	$E (GPa)$	
-	-	-	-	۹,۱۹	۷,۴۷۴۶	۰,۲۸	۲۳۷۰	۳۲۲,۲۷	Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> (T=300K)
۲۲,۸۶	۲۲,۸۶	۱۵×۱۰ <sup>-۹</sup>	۲۵×۱۰ <sup>-۶</sup>	۵	۱۲۰	۰,۳	۷۶۰۰	۶۳	G1195N

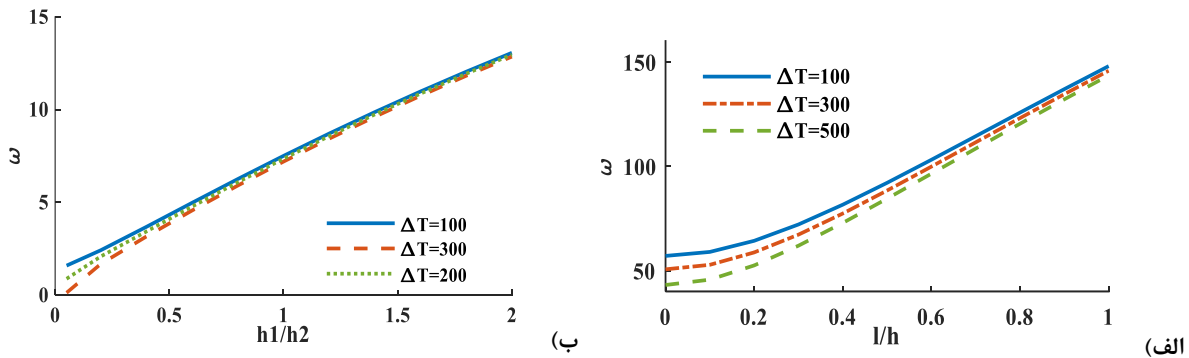


شکل ۲. اثر افزایش دما بر فرکانس بی بعد میکرو ورق همگن مجهز شده به لایه‌های مدرج تابعی پیزوالکتریک با نسبت ثابت  $l/h = 0.5$  (الف) چهار طرف گیردار، (ب) چهارطرف تکیه‌گاه ساده

برای بررسی میزان وابستگی فرکانس طبیعی بی‌بعد شده سیستم به ابعاد آن، شکل ۳-الف اثر افزایش نسبت پارامتر مقیاس طول مادی به ضخامت میکرو ورق همگن با لایه‌های مدرج تابعی پیزوالکتریک و نسبت ۲-۱-۲، برای خواص داده شده در جدول ۳ و اندیس تابع توانی  $n=1$  را برای مقادیر مختلف  $\Delta T$  نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌گردد با افزایش نسبت  $l/h$  فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش نسبت  $l/h$  اثر اختلاف دما بر فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

در ادامه به منظور بررسی اثر تغییرات ضخامت ورق بر فرکانس آن، شکل ۳-ب با خواص بیان شده قبلی و نسبت ثابت  $l/h = 0.5$  نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت  $h_1/h_2$  و افزایش نسبت ضخامت لبه‌های ورق  $h_1$  به ضخامت وسط آن  $h_2$ ، فرکانس طبیعی بی‌بعد شده سیستم افزایش می‌یابد. به علاوه با افزایش نسبت  $h_1/h_2$  اثر اختلاف دما بر فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.





شکل ۳. الف) اثر افزایش نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول مادی میکرو ورق همگن با لایه‌های مدرج تابعی پیزوالکتریک و ب) اثر ضخامت متغییر ورق بر فرکانس طبیعی بی‌بعد شده ( $l/h = 0.5$ )

## ۵- جمع بندی و نتیجه گیری

در این پژوهش تحلیل ارتعاشات آزاد وابسته به اندازه یک میکرو صفحه ضخامت متغیر با لایه‌های پیزوالکتریک هدفمند، تحت گرادیان دما مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور برای دستیابی به مدل ریاضی مسأله، مدل وابسته به بعد یک ورق میدلین ضخامت متغیر بر اساس تئوری مرتبه اول برشی و تنش کوپل بهبود یافته در نظر گرفته شد. با استفاده از روش اجزاء محدود، معادلات حاکم بر تعادل و پایداری میکرو ورق میدلین به دست آمد و در ادامه یافته‌های پژوهش حاضر با نتایج موجود در ادبیات مقایسه و صحت‌گذاری شد. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد برای تمام مقادیر اندیس تابع توانی، فرکانس طبیعی با افزایش دما به دلیل کاهش سفتی، کاهش می‌یابد. همچنین میزان کاهش فرکانس طبیعی برای ورق با شرایط مرزی چهارطرف ساده بیشتر از ورق با شرایط مرزی چهارطرف گیردار بود. در ادامه نشان داده شد که با افزایش نسبت ضخامت به پارامتر مقیاس طول ماده و همچنین با افزایش نسبت نازک‌شدگی ورق، فرکانس طبیعی بی‌بعد شده سیستم افزایش یافت.

## ۶- فهرست مراجع

1. Liew K, He X, Ng T, Sivashanker S. Active control of FGM plates subjected to a temperature gradient: modelling via finite element method based on FSDT. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2001;52(11):1253-71.
2. Praveen G, Reddy J. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates. *International journal of solids and structures*. 1998;35(33):4457-76.
3. Panda S, Ray M. Nonlinear finite element analysis of functionally graded plates integrated with patches of piezoelectric fiber reinforced composite. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2008;44(8):493-504.
4. Yang J, Shen H-S. Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates. *Composite Structures*. 2001;54(4):497-508.
5. Yang J, Shen H-S. Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments. *Journal of Sound and vibration*. 2002;255(3):579-602.
6. Li Q, Iu V, Kou K. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment. *Journal of Sound and Vibration*. 2009;324(3-5):733-50.
7. Wu X-H, Chen C, Shen Y-P, Tian X-G. A high order theory for functionally graded piezoelectric shells. *International Journal of Solids and Structures*. 2002;39(20):5325-44.
8. Lu P, Lee H, Lu C. Exact solutions for simply supported functionally graded piezoelectric laminates by Stroh-like formalism. *Composite Structures*. 2006;72(3):352-63.
9. Behjat B, Salehi M, Sadighi M, Armin A, Abbasi M. Static, dynamic, and free vibration analysis of functionally graded piezoelectric panels using finite element method. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2009;20(13):1635-46.
10. Yang F, Chong A, Lam DCC, Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International journal of solids and structures*. 2002;39(10):2731-43.

11. Ma H, Gao X-L, Reddy J. A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory. *Acta mechanica*. 2011;220(1-4):217-35.
12. Thai H-T, Nguyen T-K, Vo TP, Lee J. Analysis of functionally graded sandwich plates using a new first-order shear deformation theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2014;45:211-25.
13. Alijani F, Bakhtiari-Nejad F, Amabili M. Nonlinear vibrations of FGM rectangular plates in thermal environments. *Nonlinear Dynamics*. 2011;66:251-70.