استخراج فرکانس‌های طبیعی و شکل‌مودهای ارتعاشی نانوتیرهای چندگانه با روش بدون المان

مهدی داورپناه[آ]، عیسی احمدی[ب*]

[آ] ایران، زنجان، دانشگاه زنجان، گروه مهندسی مکانیک، کدپستی ۳۸۷۹۱-۴۵۳۷۱، کارشناسی ارشد

[ب] ایران، زنجان، دانشگاه زنجان، گروه مهندسی مکانیک، کدپستی ۳۸۷۹۱-۴۵۳۷۱، دانشیار

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: *i_ahmadi@znu.ac.ir*

چکیده

در این مقاله ارتعاشات آزاد سیستم نانوتیرهای چندگانه همگن با در نظر گرفتن بستر الاستیک وینکلر بین هر نانوتیر مورد مطالعه قرار گرفته است. از تئوری تیر تیموشنکو برای مدل‌سازی رفتار نانوتیرها و از تئوری غیرمحلی الاستیسته برای مدل‌سازی اثر کوچک بودن اندازه استفاده شده است. معادلات تعادل با استفاده از اصل همیلتون به دست آمده و یک فرمول-بندی بدون المان بر اساس شکل تضعیف شده‌ی معادلات حاکم ارائه شده است. برای گسسته‌کردن معادلات از روش درون-یابی نقطه‌ای بر اساس توابع پایه‌ای شعاعی استفاده شده است. برای صحت‌سنجی و دقت روش بدون المان، نتایج به‌دست‌آمده برای تحلیل ارتعاشات آزاد سیستم نانوتیرهای دوگانه‌ی همگن با شرایط مرزی تکیه گاه ساده با حل تحلیلی مقایسه شده که تطابق خوبی را نشان می‌دهد. در نتایج عددی، تأثیر پارامترهای مختلف بر رفتار ارتعاشی سیستم نانوتیرهای چندگانه همگن بررسی شده است و نتیجه شده است که فرمول‌بندی ارائه شده روشی کارا و موثر برای بررسی رفتار نانوساختارهایی مانند سیستم نانوتیرهای چندگانه می‌باشد.

کلمات کلیدی: ارتعاشات آزاد؛ سیستم نانوتیرهای چندگانه؛ شکل مودهای ارتعاشی؛ روش بدون المان

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر با پیشرفت تکنولوژی، نانوساختارها با کاربرد در زمینه‌های مختلف از جمله مهندسی مکانیک، مهندسی برق، مهندسی مواد و هوافضا اهمیت زیادی پیدا کرده‌اند. از این‌رو تحلیل دقیق رفتار مکانیکی به منظور طراحی و افزایش قابلیت اعتماد نانوسازه‌ها مانند نانوتیرها، نانولوله‌ها، نانوورق‌ها امری ضروری است. در میان این نانوسازه‌ها، نانوتیرها دارای کاربردهای مهم و فراوانی در سیستم‌های نانوالکترومکانیکال هستند که محدوده‌ی وسیعی از این کاربردها مانند سنسورها، محرک‌ها، ترانزیستورها، ردیاب‌ها، و

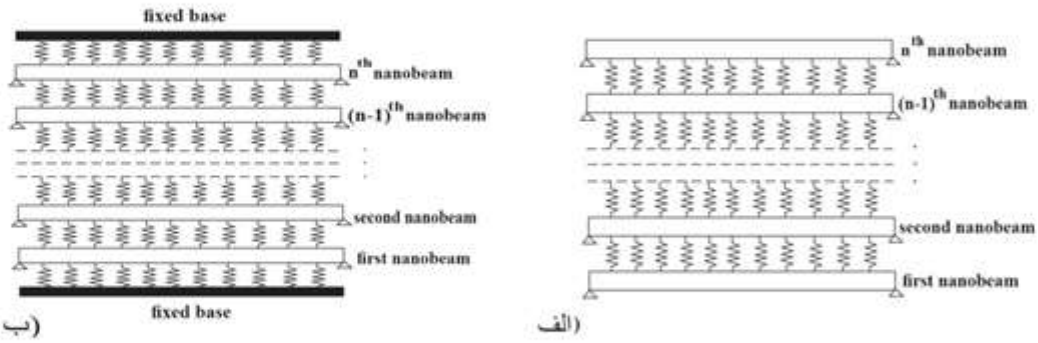
تشدیدکننده‌ها را در برگرفته است. نانوسازه‌های چندگانه[1] که شامل نانولوله‌های کربنی چندجداره، نانومیله‌های چندگانه، نانوتیرهای چندگانه، نانوورق‌های چندگانه می‌شوند، سیستم‌های پیچیده‌ای از ساختارها هستند که توسط بستر الاستیک به یکدیگر متصل می‌شوند. در این سیستم‌ها، انواع دیگر برهم‌کنش‌ها مانند نیروهای واندروالس یا نیروهای الکترواستاتیکی را می‌توان در نظر گرفت. سیستم نانوتیرهای دوگانه یکی از ساده‌ترین نانوساختارهای چندگانه است. با توجه به وجود برهم‌کنش بین نانوتیرها در این ساختار، می‌توان از یک سری فنرهای خطی برای توصیف و مدل‌سازی چنین اثری استفاده کرد. در سال‌های اخیر، رفتار مکانیکی سیستم نانوتیرهای چندگانه توسط محققین بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته است. مورمو و ادهیکاری [۲و۱]، ارتعاشات آزاد عرضی و کمانش سیستم نانوتیر دوگانه[2] اویلر-برنولی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را براساس تئوری غیرمحلی ارینگن بررسی کردند. در سال ۲۰۱۵ کارلیچیک و همکاران [۳]، ارتعاشات غیرمحلی و پایداری یک سیستم نانوتیر چندگانه کوپل شده با بستر الاستیک وینکلر را با استفاده از مدل غیرمحلی تیر اویلر-برنولی برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بررسی کردند. در سال ۲۰۱۶، کارلیچیک و همکاران [۴]، ارتعاشات خمشی یک سیستم نانوتیر چندگانه کوپل شده با بستر الاستیک وینکلر برای شرط مرزی تکیه‌گاه ساده تحت تأثیر تغییرات دما و بار محوری را مورد بررسی قرار دادند. غفاریان و آریایی [۵]، تحلیل ارتعاشات آزاد سیستم نانوتیرهای چندگانه‌ی دوار را بر اساس تئوری غیرمحلی ارینگن و مدل تیر اویلر برنولی برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار-آزاد ارائه دادند. حسینی و رحمانی [۶]، اثرات سطحی بر رفتار کمانش سیستم نانوتیر دوگانه با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را با استفاده از تئوری تیر غیرمحلی تیموشنکو مورد مطالعه قرار دادند. هاشمی و خانیکی [۷]، رفتار دینامیکی سیستم نانوتیرهای ویسکوالاستیک چندلایه را که بر روی یک محیط ویسکوالاستیک با یک نانوذره متحرک قرار دارد را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها از نظریه غیرمحلی ارینگن برای مدل‌سازی اثرات مقیاس کوچک استفاده کردند. هاشمی و خانیکی [۸] در مطالعه‌ای دیگر، پاسخ دینامیکی سیستم نانوتیرهای چندگانه تحت یک نانو ذره متحرک را با استفاده از تئوری غیرمحلی اویلر برنولی برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده ارائه دادند. در سال ۲۰۱۸ کارلیچیک و همکاران [۹]، از روش بالانس هارمونیک افزایشی برای تحلیل پایداری دینامیکی یک سیستم نانوتیر چندگانه غیرخطی با بستر ویسکو-الاستیک با استفاده از تئوری غیرمحلی ارینگن استفاده کردند. ساری و همکاران [۱۰]، از نظریه غیرمحلی الاستیسیته و روش هم-گذاری چبیشف برای مطالعه رفتار ارتعاشی سیستم نانوتیر مخروطی دوگانه مدرج تابعی محوری استفاده کردند.

در این مقاله ارتعاشات ازاد سیستم‌های نانوتیرچندگانه با استفاده از مدل تیر تیموشینکو و تئوری غیر محلی ارینگن [۱۱] مورد بررسی قرار گرفته است. یک مدل بدون المان برای حل معادلات ارایه شده است و فرکانس‌های طبیعی نانوتیرهای چندگانه با زنجیره ازاد و زنجیره بسته مورد بررسی قرار گرفته است و فرکانس‌های ارتعاشات هم‌فاز و غیر همفاز برای آن‌ها استخراج شده است. و نتایج عددی برای آنها ارایه شده است.

۲- مدل‌سازی سیستم نانوتیرهای چندگانه همگن

یک سیستم نانوتیر چندگانه با طول L، پهنای b و ضخامت h در شکل۱ نشان داده شده است.

[1] Multiple Nano Structures
[2] Double Nanobeam System



شکل ۱. شماتیک یک سیستم نانوتیر چندگانه. الف) سیستم زنجیره آزاد. ب) سیستم زنجیره بسته.

این نانوتیرها بوسیله یک سری فنرهای الاستیک خطی به یکدیگر متصل هستند. همانطور که در شکل۱ مشاهده می شود، اگر نانوتیرهای اول و آخر آزاد باشد به آن، سیستم زنجیره آزاد[۳] گفته می‌شود (شکل۱-الف) و در صورتی که نانوتیرهای اول و آخر توسط فنرهایی به پایه ثابت متصل باشد، در این حالت سیستم زنجیره بسته[۴] نامیده می‌شود (شکل۱-ب) [۳]. میدان جابجایی تیر iام براساس تئوری تیر تیموشنکو، به صورت زیر بیان می‌شود [۱۱]:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(i)}(x,z,t) &= u^{(i)}(x,t) + z\varphi^{(i)}(x,t) \\ \bar{w}^{(i)}(x,z,t) &= w^{(i)}(x,t) \end{aligned} \tag{۱}$$

که $\bar{u}^{(i)}$ و $\bar{w}^{(i)}$ جابجایی محوری و جانبی در هر نقطه از نانوتیر، $u^{(i)}$ و $w^{(i)}$ جابجایی محوری و جانبی صفحه میانی و $\varphi^{(i)}(x,t)$ چرخش سطح مقطع نانوتیر می‌باشد. بالانویس (i) بیانگر نانوتیر iام از سیستم نانوتیرهای چندگانه می‌باشد. با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حاکم بر تیر iام از سیستم نانوتیر چندگانه همگن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial t^2} \\ &\frac{\partial Q_x^{(i)}}{\partial x} + (F_{i-1} - F_i) = I_0 \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} \\ &\frac{\partial M_x^{(i)}}{\partial x} - Q_x^{(i)} = I_2 \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{۲}$$

که در رابطه (۲)، منتجه‌های تنش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_x^{(i)} = \int_{A_i} \sigma_x^{(i)} dA,\quad M_x^{(i)} = \int_{A_i} \sigma_x^{(i)} z dA,\quad Q_x^{(i)} = \kappa \int_{A_i} \tau_{xz}^{(i)} dA \tag{۳}$$

که $N_x^{(i)}$ نیروی محوری، $M_x^{(i)}$ گشتاور خمشی و $Q_x^{(i)}$ بیانگر نیروی برشی می‌باشد. κ نشان دهنده ضریب تصحیح برش است و اینرسی جرمی به صورت زیر تعریف می‌شود:

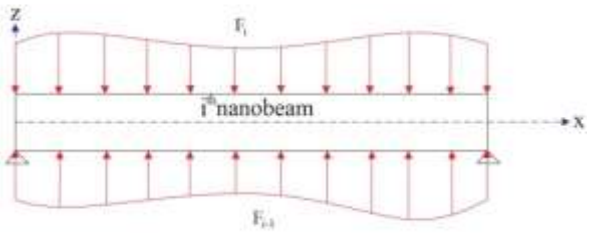
$$I_0 = \int_{A_i} \rho dA = \rho bh,\quad I_2 = \int_{A_i} \rho z^2 dA = \frac{1}{12}\rho bh^3 \tag{۴}$$

[3] Free-Chain System
[۴] Clamped-Chain System

شکل۲ بار خارجی ناشی از بستر الاستیک بر نانوتیر iام را نشان می‌دهد که F_i و F_{i-1} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F_i = k_i (w^{(i)} - w^{(i+1)}), \quad F_{i-1} = k_{i-1}(w^{(i-1)} - w^{(i)}) \qquad (۵)$$

که در آن k_i سفتی بین نانوتیر iام و $(i+1)$ام می‌باشد. همچنین، $w^{(i)}, i=1,2,3, \ldots, m$ جابجایی جانبی نانوتیر iام و m بیانگر تعداد نانوتیرها در سیستم نانوتیرهای چندگانه می‌باشد.



شکل ۲. دیاگرام آزاد نانوتیر iام تحت بار خارجی ناشی از بستر الاستیک.

معادلات ساختاری نانوتیر بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sigma_x^{(i)} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x^{(i)}}{\partial x^2} = E\,\varepsilon_x^{(i)}, \qquad \tau_{xz}^{(i)} - \mu \frac{\partial^2 \tau_{xz}^{(i)}}{\partial x^2} = \kappa G\,\gamma_{xz}^{(i)} \qquad (۶)$$

که E و G به ترتیب مدول یانگ و برشی هستند. با استفاده از روابط (۴) و (۶) معادلات ساختاری (نیروهای محوری، برشی و خمش غیرمحلی) برای نانوتیر iام طبق روابط زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} N_{xi} - \mu \frac{\partial^2 N_{xi}}{\partial x^2} &= A_0 \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} \\ Q_{xi} - \mu \frac{\partial^2 Q_{xi}}{\partial x^2} &= A_3 \left(\frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} + \varphi^{(i)}\right) \\ M_{xi} - \mu \frac{\partial^2 M_{xi}}{\partial x^2} &= A_2 \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x} \end{aligned} \qquad (۷)$$

که در معادلات فوق صلبیت‌های مقطعی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\{A_0, A_2\} = \int_{A_i} E\,\{1, z^2\}\,dA, \qquad A_3 = \kappa \int_{A_i} G\,dA \qquad (۸)$$

با صرف نظر کردن از جابجایی‌های محوری و با استفاده از روابط (۷) و (۲)، معادلات حاکم غیرمحلی سیستم نانوتیرهای چند-گانه همگن برحسب جابجایی‌ها به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &A_3\left(\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x}\right) + (F_{i-1} - F_i) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F_{i-1} - F_i) = I_0 \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} - \mu\left(I_0 \frac{\partial^4 w^{(i)}}{\partial t^4}\right) \\ &A_2 \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial x^2} - A_3\left(\frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} + \varphi^{(i)}\right) = I_2 \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial t^2} - \mu\left(I_2 \frac{\partial^4 \varphi^{(i)}}{\partial t^4}\right) \end{aligned} \qquad (۹)$$

۳- گسسته‌سازی معادلات

تعداد N زیرناحیه در نانوتیر iام در نظر گرفته می‌شود که زیرناحیه Iام به صورت Ω_s^I نامگذاری می‌شود. برای تبدیل معادلات فوق به فرم تضعیف شده، طرفین معادلات بالا در تابع آزمون $v(x)$ ضرب شده و از طرفین این معادلات روی ناحیه‌ی حل موضعی انتگرال‌گیری انجام می‌شود و با استفاده از انتگرال‌گیری جزبه‌جز معادلات (۹) به فرم تضعیف شده‌ی متقارن نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_s^I} I_0\ddot{w}^{(i)}v\,dx+\int_{\Omega_s^I}\mu I_0\ddot{w}_{,x}^{(i)}v_{,x}dx+\int_{\Omega_s^I}A_3w_{,x}^{(i)}v_{,x}dx+\int_{\Omega_s^I}A_3\varphi^{(i)}v_{,x}dx\\&=\int_{\Omega_s^I}(F_{i-1}-F_i)v\,dx+\int_{\Omega_s^I}\mu(F_{i-1}-F_i)_{,x}v_{,x}dx+\mu I_0\ddot{w}_{,x}^{(i)}v\Big|_{\partial\Omega_s^I}\\&+A_3w_{,x}^{(i)}v\Big|_{\partial\Omega_s^I}+A_3\varphi^{(i)}v\Big|_{\partial\Omega_s^I}-\mu(F_{i-1}-F_i)_{,x}v\Big|_{\partial\Omega_s^I}\end{aligned}\tag{۱۰}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_s^I} I_2\ddot{\varphi}^{(i)}v\,dx+\int_{\Omega_s^I}\mu I_2\ddot{\varphi}_{,x}^{(i)}v_{,x}dx+\int_{\Omega_s^I}A_2\varphi_{,x}^{(i)}v_{,x}dx+\int_{\Omega_s^I}A_3w_{,x}^{(i)}v\,dx+\int_{\Omega_s^I}A_3\varphi^{(i)}v\,dx\\&=\mu I_2\ddot{\varphi}_{,x}^{(i)}v\Big|_{\partial\Omega_s^I}+A_2\varphi_{,x}^{(i)}v\Big|_{\partial\Omega_s^I}\end{aligned}$$

به تعداد N گره به طور تصادفی در طول نانوتیر iام در نظر گرفته شده است. با بکارگیری روش درون‌یابی نقاط برأساس توابع پایه‌ی شعاعی، میدان جابجایی تیر را می‌توان به فرم گسسته زیر نوشت:

$$w(x)=\phi_w^j w_j=\mathbf{\Phi}_w(x)\mathbf{w},\quad \varphi(x)=\phi_\varphi^j\varphi_j=\mathbf{\Phi}_\varphi(x)\boldsymbol{\varphi}\tag{۱۱}$$

که $\mathbf{\Phi}_\mathbf{w}(x)$ و $\mathbf{\Phi}_\varphi(x)$ ماتریس‌های درون‌یابی نامیده می‌شوند و $\boldsymbol{w}$ و $\boldsymbol{\varphi}$ بردارهای مقادیر گرهی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{\Phi}_w(x)=\{\phi_1(x),\phi_2(x),..,\phi_n(x)\},\quad \mathbf{w}=\{w_1,w_2,..,w_n\}^T,\quad \boldsymbol{\varphi}=\{\varphi_1,\varphi_2,..,\varphi_n\}^T\tag{۱۲}$$

حال با جایگذاری روابط (۱۱) در معادلات (۱۰)، می‌توان معادلات حاکم غیرمحلی سیستم نانوتیرهای چندگانه همگن را گسسته سازی نمود و معادلات را برای $\mathbf{i}$امین نانوتر به شکل استاندارد زیر نوشت:

$$\begin{aligned}&[M]^I\{\ddot{d}\}^{(i)}+([K]^I+(k_i+k_{i-1})[K]_{coup}^I)\{d\}^{(i)}-k_{i-1}[K]_{coup}^I\{d\}^{(i-1)}\\&-k_i[K]_{coup}^I\{d\}^{(i+1)}=\{0\}\end{aligned}\tag{۱۳}$$

که $[M]^I$، $[K]^I$ و $[K]_{coup}^I$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، سفتی و سفتی اتصال برای زیرناحیه محلی $\mathbf{I}$ام می‌باشد. همچنین $\{\mathrm{d}\}^{(\mathrm{i})}$ یک ماتریس ستونی $2N\times1$ می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{d\}^{(i)}=\{w_1^{(i)},w_2^{(i)},...,w_n^{(i)},\varphi_1^{(i)},\varphi_2^{(i)},...,\varphi_n^{(i)}\}^T\tag{۱۴}$$

و ماتریس‌های جرم محلی و غیرمحلی برای نانوتیر همگن به شکل زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\left[M_1\right]_h^I=\int_{\Omega_s^I}\begin{bmatrix}I_0\mathbf{\Phi}_w v & \{0\}\\ \{0\} & I_2\mathbf{\Phi}_\varphi v\end{bmatrix}dx\\&\left[M_2\right]_h^I=\int_{\Omega_s^I}\mu\begin{bmatrix}I_0\mathbf{\Phi}_{w,x}v_{,x} & \{0\}\\ \{0\} & I_2\mathbf{\Phi}_{\varphi,x}v_{,x}\end{bmatrix}dx\end{aligned}\tag{۱۵}$$

که $\{0\}$ یک ماتریس صفر $1\times N$ سطری می‌باشد. ماتریس جرم کل را به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$[M]_h^I = [M_1]_h^I + [M_2]_h^I \tag{۱۶}$$

ماتریس سفتی برای نانوتیر مدرج تابعی دوبعدی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$[K]_h^I = \int_{\Omega_s^I} \begin{bmatrix} A_3 \mathbf{\Phi}_{w,x} v_{,x} & A_3 \mathbf{\Phi}_{\varphi} v_{,x} \\ A_3 \mathbf{\Phi}_{w,x} v & A_2 \mathbf{\Phi}_{\varphi,x} v_{,x} + A_3 \mathbf{\Phi}_{\varphi} v \end{bmatrix} dx \tag{۱۷}$$

و ماتریس سفتی اتصال به صورت زیر بدست می‌آید.

$$[K]_{coup}^I = -\int_{\Omega_s^I} \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_w v + \mu \mathbf{\Phi}_{w,x} v_{,x} & \{0\} \\ \{0\} & \{0\} \end{bmatrix} dx \tag{۱۸}$$

حال معادلات حاکم به شکل استاندارد زیر قابل نوشتن است.

$$[\tilde{M}]_h \{\ddot{\tilde{d}}\} + ([\tilde{K}]_h + [K]_{coup}^I)\{\tilde{d}\} = \{0\} \tag{۱۹}$$

برای مثال ماتریس‌های جرم و سفتی سیستم نانوتیر دوگانه به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$[\tilde{M}]_h = \begin{bmatrix} [M]^{(1)} & [0] \\ [0] & [M]^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{K}]_h = \begin{bmatrix} [K]^{(1)} + (k_0 + k_1)[K]_{coup} & -k_1 [K]_{coup} \\ -k_1 [K]_{coup} & [K]^{(2)} + (k_1 + k_2)[K]_{coup} \end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

که $[K]^{(1)}$ و $[K]^{(2)}$ به ترتیب ماتریس‌های سفتی نانوتیر اول و دوم و $[M]^{(1)}$ و $[M]^{(2)}$ به ترتیب ماتریس‌های جرم نانوتیر اول و دوم هستند. همچنین، k_0 و k_2 سفتی اتصال نانوتیر اول و دوم به پایه ثابت (سیستم زنجیره ثابت) است. k_1 سفتی اتصال بین نانوتیر اول و دوم می‌باشد. اگر سیستم، یک سیستم زنجیره آزاد باشد، k_0 و k_2 باید برابر با صفر می‌شود. در این مطالعه، سفتی تمامی فنرها یکسان در نظر گرفته شده است ($k_0=k_1=k_2$). بطور مشابه، برای یک سیستم با سه نانوتیر (سیستم نانوتیر سه‌گانه) و یا تعداد بیشتر نانوتیر معادلات با رویکرد مشابه قابل استخراج است. فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد سیستم نانوتیرهای چندگانه همگن را می‌توان با حل مسأله مقدار ویژه زیر به دست آورد.

$$\det([\tilde{K}]_h - \omega^2 [\tilde{M}]_h) = 0 \tag{۲۱}$$

که ω بیانگر فرکانس‌های طبیعی سیستم نانوتیرهای چندگانه است.

۴- نتایج عددی

در این قسمت، نتایج عددی برای فرکانس های طبیعی سیستم نانوتیرهای چندگانه همگن ارائه شده است. پارامترهای بی‌بعد مورد نیاز به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad , \quad \bar{k} = \frac{k L^4}{EI} \quad , \quad \zeta = \frac{\sqrt{\mu}}{L} \tag{۲۲}$$

که در آن Ω بیانگر فرکانس بی‌بعد، $\bar{k}$ و ζ سفتی و پارامتر غیرمحلی بی‌بعد می‌باشد. همچنین A سطح مقطع و I ممان اینرسی سطحی و k سفتی فنرها می‌باشد. از تابع اسپلاین ورق نازک [۱۲]، به عنوان تابع پایه شعاعی استفاده شده است و ضریب تصحیح برش برابر با κ=5/6 در نظر گرفته شده است. ابتدا برای صحت سنجی دقت نتایج، همگرایی فرکانس طبیعی اول بی‌بعد تک نانوتیر همگن با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده برای مقادیر مختلف نسبت لاغری L/h و پارامتر غیرمحلی μ و تعداد گره N در جدول (۱) ارائه شده است و با تئوری‌های مختلف تیر و روش‌های تحلیلی و المان محدود مقایسه شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر غیرمحلی، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش می‌یابد. همچنین، نتایج بدست آمده مطابقت خوبی را با حل‌های تحلیلی و المان محدود نشان می‌دهد. تأثیرات پارامتر غیرمحلی و سفتی اتصال بی‌بعد بر روی سه فرکانس اول طبیعی بی‌بعد سیستم نانوتیر دوگانه همگن با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در جدول (۲) مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج مطابقت خوبی را با حل تحلیلی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش سفتی فنر، به دلیل بالا رفتن سفتی سیستم، فرکانس‌های طبیعی نیز افزایش می‌یابد. در ζ=1، سه فرکانس اول در حالت هم‌فاز بوده و فرکانس‌های بعدی در حالت خارج از فاز می‌باشد. به همین دلیل در ζ=1، سه فرکانس اول با افزایش سفتی فنر، تغییری نمی‌کند.

جدول ۱. مقایسه فرکانس طبیعی بنیادی بی‌بعد برای تک نانوتیر همگن با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده

($E=30\times10^6$, ρ =1, b=1nm, L=10nm, κ =5/6)

L/h	Number of nodes	$\mu=0$ (nm^2)	$\mu=1$ (nm^2)	$\mu=2$ (nm^2)	$\mu=3$ (nm^2)	$\mu=4$ (nm^2)
20	N=20	9.8294	9.3775	8.9827	8.6339	8.3229
	N=40	9.8282	9.3764	8.9816	8.6329	8.3219
	N=60	9.8281	9.3763	8.9816	8.6328	8.3218
	N=80	9.8281	9.3763	8.9816	8.6328	8.3218
	N=100	9.8281	9.3763	8.9816	8.6328	8.3218
	EBT, analytical [13]	9.8696	9.4159	9.0195	8.6693	8.3569
	TBT, analytical [13]	9.8381	9.3858	8.9907	8.6416	8.3302
	RBT, analytical [13]	9.8381	9.3858	8.9907	8.6416	8.3302
	LBT, analytical [13]	9.8433	9.3908	8.9955	8.6462	8.3347

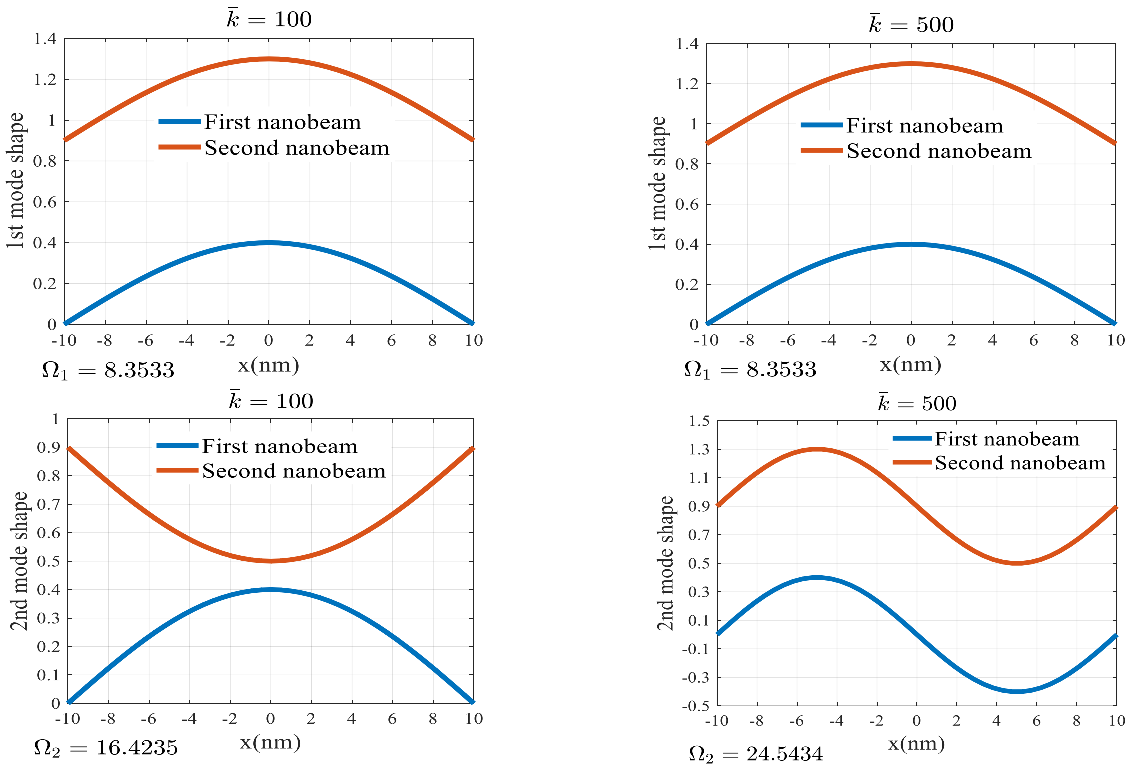
فرکانس هم‌فاز حالتی است که در آن دو تیر بصورت مشابه و همزمان در یک راستای جانبی ارتعاش می‌کنند ولی فرکانس خارج از فاز حالتی است که دو تیر در دو راستای جانبی متفاوت حرکت می‌کنند و اختلاف فاز آن‌ها ۱۸۰ درجه می‌باشد. ضریب سفتی فنر هیچ نقشی در حالت هم‌فاز ندارد، چرا که در ارتعاش هم‌فاز فاصله دوتیر تغییر نمی‌کند و سفتی اتصال فعال نمی‌شود.

جدول ۲. سه فرکانس طبیعی اول سیستم نانوتیر دوگانه با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده ($E=30\times10^6$, ρ =1, b=1nm, L=10nm, κ =5/6)

$\bar{k}$	ζ		Ω_1	Ω_2	Ω_3
100	0	present	9.8654	17.2417	39.4160
		analytical solution [1]	9.8696	17.2456	39.4784
	0.2	present	8.3533	16.4235	24.5434
		analytical solution [1]	8.3569	16.4267	24.5823
	0.4	present	6.1429	14.5720	15.4171
		analytical solution [1]	6.1456	14.5951	15.4197

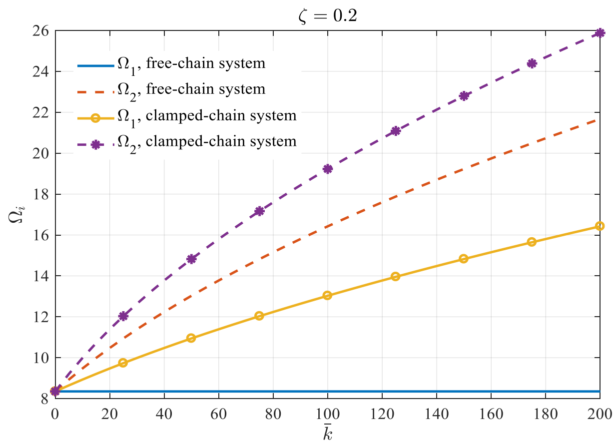
0.8	present	3.6472	7.6908	11.6351
	analytical solution [1]	3.6488	7.7030	11.6787
1	present	2.9923	6.1953	9.3372
	analytical solution [1]	2.9936	6.2051	9.3722

شکل مود ارتعاشی هم‌فاز و خارج از فاز سیستم نانوتیر دوگانه در شکل (۳) نشان داده شده است. سه شکل مود اول ارتعاشی سیستم نانوتیر دوگانه همگن با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده برای دو مقدار مختلف سفتی فنر در شکل (۳) ارائه و مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که شکل مودهای دوم و چهارم در $\bar{k} = 100$ در حالت خارج از فاز و شکل مودهای اول و سوم در حالت هم‌فاز قرار دارد. در $\bar{k} = 500$ ارتعاش هم فاز در شکل مودهای اول و دوم و ارتعاش خارج از فاز در شکل مودهای سوم و چهارم رخ می‌دهد. می‌توان نتیجه گرفت که نیروی برهمکنش در ارتعاش هم‌فاز سیستم نانوتیرهای چندگانه قابل چشم‌پوشی است چرا که در ارتعاش هم‌فاز $w^{(2)}$-$w^{(1)}$=0 می‌باشد.

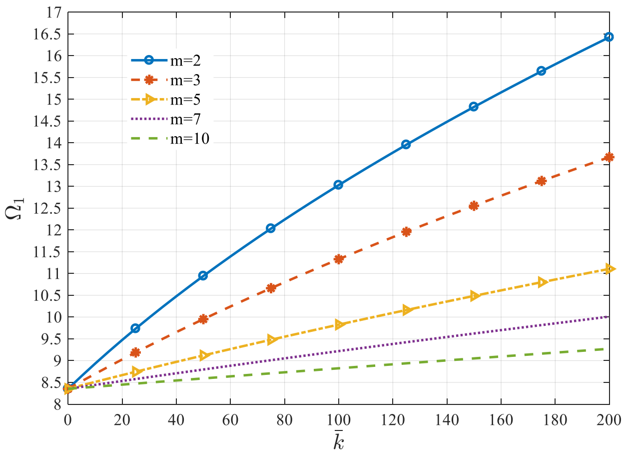


شکل ۳. دو شکل مود اول سیستم نانوتیر دوگانه همگن با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده (ζ =0.2, *b*=1nm, *L*=20nm, *h*=0.34nm)

مقایسه فرکانس طبیعی اول و دوم بی‌بعد سیستم نانوتیر دوگانه زنجیر آزاد و زنجیره بسته b=1*nm*, L=20*nm*, h=0.34*nm* با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در شکل (۴) نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که فرکانس اول در سیستم زنجیر آزاد برخلاف سیستم زنجیره آزاد با افزایش سفتی فنر تغییر نمی‌کند. همچنین فرکانس‌های طبیعی در سیستم زنجیر آزاد به دلیل افزایش سفتی، بیشتر از فرکانس‌های طبیعی سیستم زنجیر آزاده است. اثر تعداد نانوتیرها روی فرکانس طبیعی بنیادی بی‌بعد سیستم نانوتیرهای چندگانه همگن با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در شکل (۵) ارائه شده است. مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی با افزایش تعداد نانوتیرها کاهش می‌یابد.

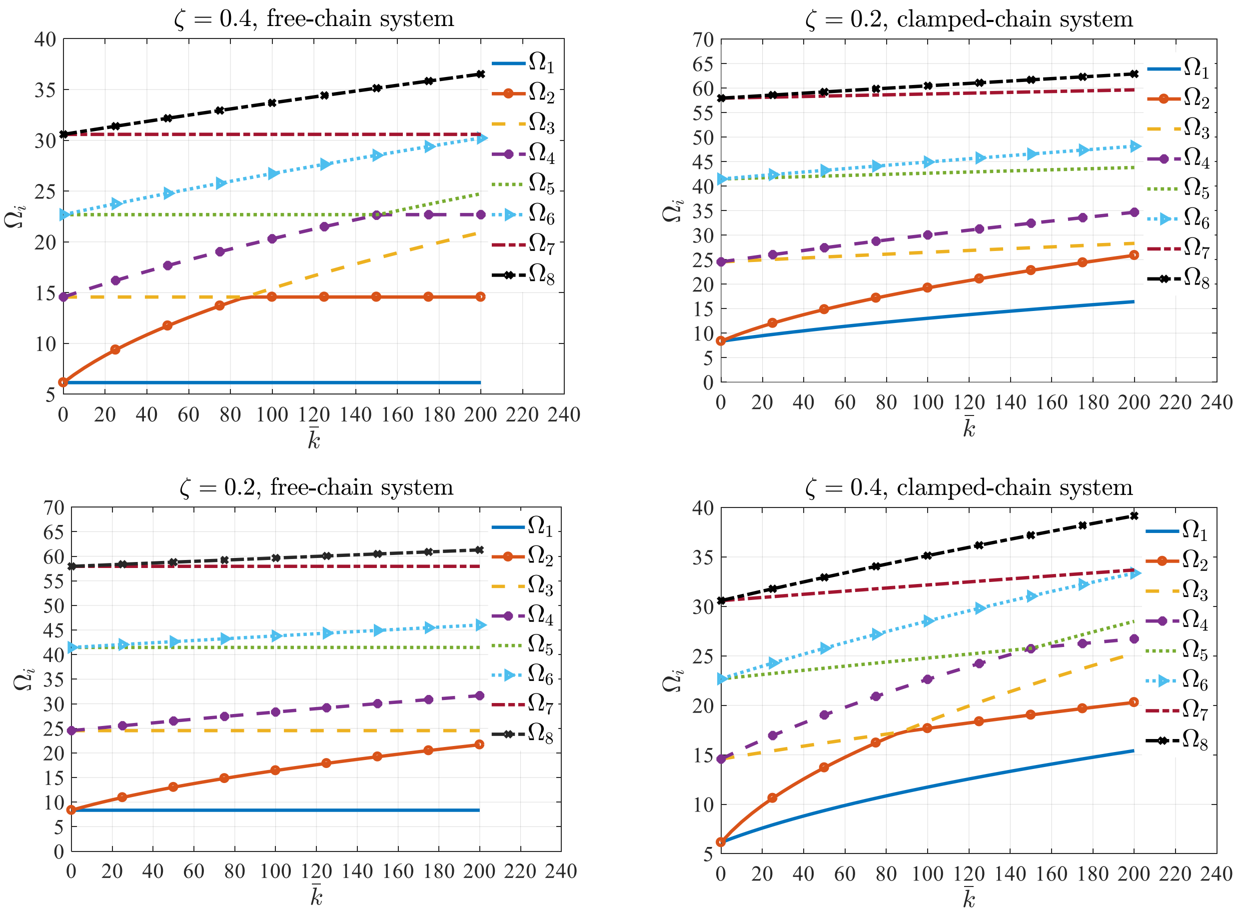


شکل ۴. مقایسه فرکانس طبیعی اول و دوم بی‌بعد سیستم نانوتیر دوگانه زنجیره آزاد و زنجیره بسته با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده



شکل ۵. اثر تعداد نانوتیرها روی فرکانس طبیعی بنیادی بی‌بعد سیستم نانوتیرهای چندگانه همگن با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده(ζ=۰.۲)

شکل (۶) تغییر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد را نسبت به مقادیر مختلف سفتی فنر برای سیستم نانوتیر دوگانه همگن با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده به تصویر می‌کشد. در این شکل، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد برای دو مقدار متفاوت پارامتر غیرمحلی بی‌بعد ζ برای سیستم‌های زنجیره آزاد و زنجیره بسته ارائه شده‌اند.



شکل۶. تغییرات فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد نسبت به مقادیر مختلف سفتی فنر برای سیستم نانوتیر دوگانه همگن با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده (*b*=1 nm, *L*=20 nm, *h*=0.34 nm, *κ*=5/6)

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات آزاد سیستم نانوتیرهای چندگانه همگن با در نظر گرفتن بستر الاستیک وینکلر بین هر نانوتیر با تئوری تیر تیموشینکو و تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن مورد مطالعه قرار گرفته است. یک مدل بدون المان برای گسسته‌کردن معادلات از روش درون‌یابی نقطه‌ای بر اساس توابع پایه‌ای شعاعی استفاده شده است و یک مدل بدون المان برای حل معادلات ارایه شده است. برای صحت‌سنجی و دقت روش بدون المان، نتایج به‌دست‌آمده برای تحلیل ارتعاشات آزاد سیستم نانوتیرهای دوگانه‌ی همگن با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده با حل تحلیلی مقایسه شده که تطابق خوبی را نشان می‌دهد. نتیجه شده است که در سیستم نانوتیرچندگانه زنجیره آزاد، سفتی اتصال وینکلر نقشی در فرکانس طبیعی سیستم در ارتعاشات همفاز ندارد ولی در ارتعاشات خارج از فاز، افزایش سفتی منجر به افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌شود. همچنین ملاحظه شده است که با افزایش پارامتر غیرمحلی فرکانس‌های طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. در حالتی که سایر پارامترها یکسان باشد با افزایش تعداد نانوتیرها فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد. از بررسی نتایج عددی می‌توان نتیجه گرفت که فرمول‌بندی ارائه شده روشی کارا و موثر برای بررسی رفتار نانوساختارهایی مانند سیستم نانوتیرهای چندگانه می‌باشد.

مراجع

[1] Murmu, T., and Adhikari,.S. "Nonlocal transverse vibration of double-nanobeam-systems." *Journal of Applied Physics* 108.8 (2010): 083514.

[2] Murmu, T., and Adhikari. S. "Axial instability of double-nanobeam-systems." *Physics Letters A*375.3 (2011): 601-608.

[3] Karličić, D., Kozić, P., and Pavlović, R. "Nonlocal vibration and stability of a multiple-nanobeam system coupled by the Winkler elastic medium." *Applied Mathematical Modelling* 40.2 (2016): 1599-1614.

[4] Karličić, D., Ožvat, S., Cajić, M., Kozić, P., & Pavlović, R. "Bending vibration and stability of a multiple-nanobeam system influenced by temperature change." Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering 14.1 (2016): 75-88.

[5] Ghafarian, M., and Ariaei, A. "Free vibration analysis of a multiple rotating nano-beams system based on the Eringen nonlocal elasticity theory." *Journal of Applied Physics* 120.5 (2016): 054301.

[6] Hosseini, S. A. H., and Rahmani, O. "Surface effects on buckling of double nanobeam system based on nonlocal Timoshenko model." *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 16.10 (2016): 1550077.

[7] Hashemi, Sh Hosseini, and Bakhshi Khaniki, H. "Dynamic behavior of multi-layered viscoelastic nanobeam system embedded in a viscoelastic medium with a moving nanoparticle." *Journal of Mechanics* 33.5 (2017): 559-575.

[8] Hashemi, Sh Hosseini, and Bakhshi Khaniki H. "Dynamic response of multiple nanobeam system under a moving nanoparticle." *Alexandria engineering journal* 57.1 (2018): 343-356.

[9] Karličić, D., Cajić, M., & Adhikari, S. "Dynamic stability of a nonlinear multiple-nanobeam system." *Nonlinear Dynamics* 93.3 (2018): 1495-1517.

[10] Sari, MS., Al-Kouz WG, and Atieh AM. "Transverse vibration of functionally graded tapered double nanobeams resting on elastic foundation." *Applied Sciences* 10.2 (2020): 493.

[11] Eringen, A. C.l. "Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves." International Journal of Engineering Science 10.5 (1972): 425-435.

[12] Liu, G-R. Meshfree methods: moving beyond the finite element method. CRC press, 2009.

[13] Reddy, JN. "Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams." International Journal of Engineering Science 45.2-8 (2007): 288-307.