

بررسی فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دوجداره به روش گلرکین

مهدی باباخانی^آ، عیسی احمدی^{ب*}

^آ ایران، زنجان، دانشگاه زنجان، گروه مهندسی مکانیک، کدپستی ۳۸۷۹۱-۴۵۳۷۱، دانشجوی کارشناسی ارشد

^ب ایران، زنجان، دانشگاه زنجان، گروه مهندسی مکانیک، کدپستی ۳۸۷۹۱-۴۵۳۷۱، دانشیار

*پست الکترونیکی نویسنده مسئول: i_ahmadi@znu.ac.ir

چکیده

در پژوهش حاضر، پاسخی تحلیلی به مسأله ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای نازک دوجداره (تودرتو) با استفاده از روش گلرکین ارائه شده است. میدان جابجایی پوسته‌ها به صورت حاصل ضرب دو تابع مثلثاتی در جهت محوری و محیطی پوسته استوانه‌ای در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت بر اساس نظریه کلاسیک پوسته‌ها و تئوری پوسته لاو به دست آمده است. در این پژوهش فرض شده است که پوسته‌های تودرتو توسط یک بستر الاستیک وینکلر به هم متصل شده‌اند. در نهایت معادلات حاکم به صورت تحلیلی به روش گلرکین حل شده تا فرکانس طبیعی نوسانات سیستم به دست آید. شایان ذکر است که اثرات شرایط مرزی مختلف ساده-ساده، گیردار-گیردار و گیردار-ساده و همچنین انواع لایه‌گذاری و نسبت طول به قطر بر فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های نازک تک‌داره و دوجداره نیز در این پژوهش بررسی شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که با افزایش نسبت طول به قطر و همچنین با افزایش ضریب سفتی فنر، فرکانس طبیعی بی‌بعد دوجداره افزایش پیدا می‌کند.

کلمات کلیدی: پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دوجداره؛ فرکانس طبیعی؛ آنالیز ارتعاشات؛ روش گلرکین؛

۱- مقدمه

ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای دایره‌ای مورد توجه جامعه مهندسی است، زیرا به طور گسترده در بسیاری از کاربردهای عملی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بطور مثال یکی از مهم‌ترین کاربردهای پوسته‌های کامپوزیتی تک‌داره و دوجداره در تولید لوله و مخازن تحت فشار خارجی است. این لوله‌ها و مخازن علاوه بر فشار داخلی سیال، در برابر فشارهای خارجی نیز استحکام خوبی دارند و می‌توان

از آن‌ها در فشار خارجی بالا استفاده کرد. کاربرد لوله‌های کامپوزیتی در خطوط انتقال نفت از سکوها به پالایشگاه‌ها و کاربرد مخازن کامپوزیتی در صنایع دریایی و حمل و نقل می‌باشد. اولین نظریه تقریب لایه^۱ [۱]، و پیش شرط‌هایی که او ایجاد کرد، نظریه اساسی ارتعاشات پوسته است. از آن زمان تلاش زیادی برای بهبود نظریه اولیه انجام شده است. در نتیجه، نظریه‌های متعددی توسط بسیاری از محققین ارائه شده است و در مرجع [۲] می‌توان مروری جامع بر آن‌ها یافت. در بین این نظریه‌ها، نظریه دانیل^۲ [۳]، نظریه ریسنر^۳ [۴]، نظریه سندرز^۴ [۵] و نظریه فلوگی^۵ [۶] بیشترین استفاده را دارند. روش‌های تحلیلی مختلفی برای حل مسائل ارتعاشات پوسته با شرایط مرزی مختلف وجود دارد. در سال ۱۹۹۶ لی‌هوآ و لام [۷]، برای اولین بار تاثیرات شرایط مرزی بر ویژگی‌های فرکانس یک پوسته استوانه‌ای نازک دوار را به روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته بررسی کردند. لام و وو در سال ۱۹۹۹ [۸]، ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه متعامد دوار ضخیم را بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته به روش ناویر مورد مطالعه قرار دادند. علاوه بر این، ویژگی‌های فرکانس پوسته‌های نازک و ضخیم با توجه به تغییرات سرعت چرخش، تعداد موج‌های محیطی و نسبت طول و ضخامت نیز در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفته است. در این پژوهش، معادلات حاکم با در نظر گرفتن شتاب‌های کوریولیس و اینرسی‌های دورانی استخراج شده‌اند. در سال ۲۰۰۲ ژانگ [۹]، به بررسی ارتعاشات پوسته‌های کامپوزیتی دایره‌ای چندلایه به روش رویکرد انتشار موج پرداخت. با روش حاضر در این مقاله، تاثیر پارمترهای پوسته، حالت محوری، حالت محیطی، نسبت ضخامت به شعاع، نسبت طول به شعاع، سرعت چرخش و شرایط مرزی بر فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است. جینگ ژانگ و همکاران در سال ۲۰۱۹ [۱۰]، ارتعاشات غیرخطی یک پوسته استوانه‌ای لاستیکی جدارنازک که از مواد کلاسیک غیرقابل تراکم مانی-ریویلن تشکیل شده و تحت یک تحریک هارمونیک شعاعی قرار گرفته است را مورد بررسی قرار دادند. معادلات حاکم در این پژوهش به کمک فرضیه کیرششف-لاو، تئوری پوسته دانیل، روابط تشکیل دهنده هایپراستیک، معادلات لاگرانژ و فرضیه کرنش کوچک به دست آمده است. در سال ۲۰۲۰ ابراهیمی و دباق [۱۱] به بررسی ارتعاشات پوسته‌های نانوکامپوزیت هیبریدی چند مقیاسی با در نظر گرفتن تجمع نانوفیلرها پرداختند. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با شکل دینامیکی اصل کار مجازی ترکیب می‌شود تا به معادلات لاگرانژ-اویلر مساله برسد. در نهایت با استفاده از معادلات سازنده نانوکامپوزیت، معادلات حاکم از معادلات اویلر-لاگرانژ استخراج می‌شود. در این پژوهش برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی از روش گلرکین استفاده شده است. در سال ۲۰۲۱ عابدینی و کیانی [۱۲]، به تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی با پلاکت‌های گرافن پرداختند. برای این منظور از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته‌ها و نظریه دانیل استفاده شده است. از اصل همپلتون برای استخراج معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد پوسته‌ها و همچنین شرایط مرزی استفاده شده است.

در این مقاله فرکانس‌های طبیعی استوانه کامپوزیتی دوجداره تودرتو با استفاده از تئوری لاو و روش گلرکین مورد بررسی قرار گرفته است و حل تحلیلی برای آن ارائه شده است. استوانه‌ها بصورت تودرتو می‌باشد که بوسیله یک بستر الاستیک وینکلر به یکدیگر متصل شده است. حل برای شرایط مرزی ساده-ساده، گیردار-گیردار و گیردار-ساده ارائه شده است. سپس نتایج عددی برای لایه‌گذاری‌های مختلف و نسبت طول به قطرهای متفاوت ارائه شده است و همچنین شکل مودهای ارتعاشی مختلف ارائه شده است.

۲- معادلات حاکم و فرمولاسیون

۱-۲ پوسته تک‌جداره

پوسته استوانه‌ای تک‌جداره دارای ضخامت h ، طول L ، و شعاع R می‌باشد. سیستم مختصات در نظر گرفته شده به صورت (x, θ, z) است. مختصات x در جهت محوری پوسته، مختصات θ و z به ترتیب در جهات محیطی و شعاعی پوسته در نظر گرفته شده است که در شکل (۱) قابل مشاهده می‌باشد. جابجایی پوسته به ترتیب با (u, v, w) در جهات (x, θ, z) تعریف می‌شوند.

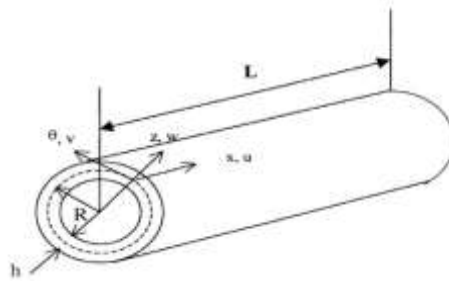
¹ Love's first approximation theory

² Donnell theory

³ Reissner theory

⁴ Sanders theory

⁵ Flügge's theory



شکل ۱. شماتیک یک پوسته استوانه‌ای تک‌جداره

معادلات کلی حاکم بر حرکت یک پوسته استوانه‌ای برحسب منتجه‌های نیرو و گشتاور را می‌توان به صورت معادله (۱) بیان کرد [۷]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \right) = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} - \frac{N_\theta}{R} = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho dz \quad (2)$$

که در معادلات فوق ρ بیانگر چگالی و N_i و M_i به ترتیب بیانگر منتجه‌های نیرو و منتجه‌های گشتاور می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۷]:

$$(N_x, N_\theta, N_{x\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}) dz \quad (3)$$

$$(M_x, M_\theta, M_{x\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}) z dz \quad (4)$$

که σ_x تنش عمودی در راستای x ، σ_θ تنش محیطی و $\sigma_{x\theta}$ تنش برشی در صفحه $x\theta$ می‌باشد. رابطه تنش- کرنش در یک

تک لایه به صورت زیر می‌باشد [۹]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

که ε_x و ε_θ به ترتیب کرنش در راستای محوری و محیطی و $\gamma_{x\theta}$ کرنش برشی در فاصله z از صفحه مرجع می‌باشند که به

صورت زیر تعریف می‌شوند [۹]:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x,0} + z \kappa_x$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta,0} + z \kappa_\theta \quad (6)$$

$$\gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta,0} + z \kappa_{x\theta}$$

که $(\varepsilon_{x,0}, \varepsilon_{\theta,0}, \gamma_{x\theta,0})$ کرنش سطح میانی پوسته و $(\kappa_x, \kappa_\theta, \kappa_{x\theta})$ انحنای صفحه میانی پوسته می‌باشند که روابط آن‌ها به

صورت زیر می‌باشد [۷]:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{x,0}, \varepsilon_{\theta,0}, \gamma_{x\theta,0}) &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} \\ (\kappa_x, \kappa_\theta, \kappa_{x\theta}) &= \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{1}{R^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \frac{1}{R} \left(-\frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

همچنین \bar{Q}_{ij} ماتریس سفتی کاهش یافته انتقال یافته می‌باشد که مولفه‌های آن به صورت زیر بیان می‌شوند [۱۳]:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(c^4 + s^4) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66})sc^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66})s^3c - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(c^4 + s^4) \end{aligned} \quad (8)$$

در رابطه فوق Q_{ij} مولفه‌های ماتریس سفتی کاهش یافته و θ همان زاویه الیاف‌های لایه کامپوزیت و همچنین c و s در رابطه فوق به ترتیب کسینوس و سینوس زاویه الیاف آن لایه نسبت به محور x می‌باشد. با جایگذاری معادلات (۶) و (۷) در معادله (۵) و سپس جایگذاری معادله حاصل در روابط (۳) و (۴)، منته‌های نیرو به صورت زیر به دست می‌آیند [۹]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,0} \\ \varepsilon_{\theta,0} \\ \gamma_{x\theta,0} \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

در رابطه (۹) ماتریس‌های $[A]$ ، $[B]$ و $[D]$ به ترتیب ماتریس‌های سفتی کششی، کوپلینگ کشش و خمش و سفتی خمشی نامیده می‌شوند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۹].

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (10)$$

که n بیانگر تعداد لایه‌ها، h_k و h_{k-1} فاصله سطح مرجع پوسته تا سطوح خارجی و داخلی لمینت k ام و $[\bar{Q}_{ij}]_k$ ماتریس سفتی کاهش یافته انتقال یافته برای لایه k ام می‌باشند. با توجه به معادلات (۸) و (۱۰) و همچنین با جایگذاری معادله (۹) در معادله (۱)، می‌توان معادله (۱) را به فرم ماتریسی به صورت زیر نوشت [۷]:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

که در آن که در آن L_{ij} عملگرهای دیفرانسیلی می‌باشند که به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

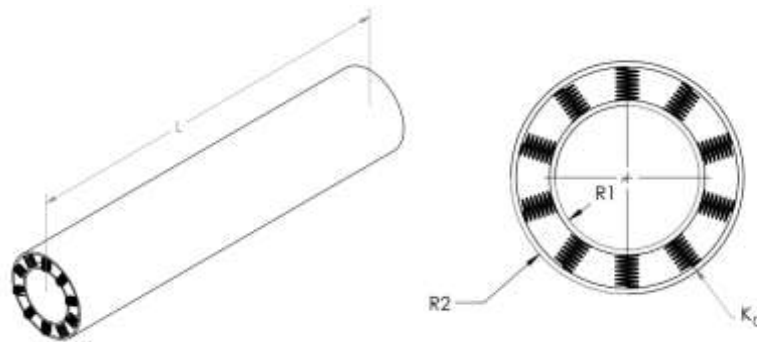
$$\begin{aligned}
 L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2A_{16}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
 L_{12} &= \left(\frac{A_{12} + A_{66}}{R} + \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + \left(A_{16} + \frac{2B_{16}}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{A_{26}}{R^2} + \frac{B_{26}}{R^3} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\
 L_{13} &= -B_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{3B_{16}}{R} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} \\
 &\quad + \frac{A_{26}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{B_{26}}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3}
 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

$$\begin{aligned}
 L_{21} &= \left(\frac{A_{12} + A_{66}}{R} + \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + \left(A_{16} + \frac{B_{16}}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{A_{26}}{R^2} + \frac{B_{26}}{R^3} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\
 L_{22} &= \left(A_{66} + \frac{3B_{66}}{R} + \frac{2D_{66}}{R^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{2A_{26}}{R} + \frac{5B_{26}}{R^2} + \frac{3D_{26}}{R^3} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
 &\quad + \left(\frac{A_{22}}{R^2} + \frac{2B_{22}}{R^3} + \frac{D_{22}}{R^4} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

$$\begin{aligned}
 L_{23} &= -\left(\frac{B_{12} + 2B_{66}}{R} + \frac{D_{12} + 2D_{66}}{R^2} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} + \left(\frac{A_{22}}{R^2} + \frac{B_{22}}{R^3} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{B_{22}}{R^3} + \frac{D_{22}}{R^4} \right) \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \\
 &\quad - \left(B_{16} + \frac{D_{16}}{R} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \left(\frac{A_{26}}{R} + \frac{B_{26}}{R^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{3B_{26}}{R^2} + \frac{3D_{26}}{R^3} \right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} \\
 L_{31} &= B_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{B_{12} + 2B_{66}}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{3B_{16}}{R} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{A_{26}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{B_{26}}{R^3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \\
 L_{32} &= \left(\frac{B_{12} + 2B_{66}}{R} + \frac{D_{12} + 2D_{66}}{R^2} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \theta} - \left(\frac{A_{22}}{R^2} + \frac{B_{22}}{R^3} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{B_{22}}{R^3} + \frac{D_{22}}{R^4} \right) \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \\
 &\quad + \left(B_{16} + \frac{2D_{16}}{R} \right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \left(\frac{A_{26}}{R} + \frac{2B_{26}}{R^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{3B_{26}}{R^2} + \frac{4D_{26}}{R^3} \right) \frac{\partial^3}{\partial x \partial \theta^2} \\
 L_{33} &= -D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \left(\frac{2B_{12}}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2D_{12} + 4D_{66}}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \left(\frac{2B_{22}}{R^3} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\
 &\quad - \frac{D_{22}}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} - \left(\frac{A_{22}}{R^2} + \rho h \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{4D_{16}}{R} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial \theta} - \frac{4D_{26}}{R^3} \frac{\partial^4}{\partial x \partial \theta^3}
 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

۲-۲ پوسته‌های دوجداره

در بخش قبل، در مورد پوسته‌های استوانه‌ای تک جداره به‌طور مفصل بحث شد و معادلات حاکم بر این پوسته‌ها به‌طور کامل استخراج و ارائه گردید. در این پژوهش به بررسی پوسته‌های استوانه‌ای دوجداره (تودرتو) خواهیم پرداخت. فرض می‌شود که پوسته داخلی با پوسته خارجی توسط یک بستر الاستیک وینکلر با ثابت فنر k_0 به هم متصل شده‌اند و نیروی $q(x, \theta)$ از طریق این بستر به پوسته وارد می‌شود. در شکل (۲) شماتیک یک پوسته استوانه‌ای دوجداره آورده شده است.



شکل ۲. شماتیک یک پوسته استوانه‌ای دوجداره

معادلات کلی حاکم بر حرکت پوسته به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} &= I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) &= I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} + q &= I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (15)$$

که در معادله فوق، $q = k_0(w_2 - w_1)$ نیروی وارده توسط فنر در راستای شعاعی می‌باشد. با تکرار روند بخش قبل برای

پوسته‌های دوجداره، معادله (۱) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{32} & L_{33} + K_{coupling} & 0 & 0 & -K_{coupling} \\ 0 & 0 & 0 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ 0 & 0 & 0 & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ 0 & 0 & -K_{coupling} & L_{31} & L_{32} & L_{33} + K_{coupling} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

جنس پوسته مورد مطالعه در این پژوهش T300 می‌باشد که خواص مکانیکی آن در جدول (۱) آورده شده است.

جدول ۱. خواص مکانیکی T300

جنس ماده	مدول یانگ			مدول برشی			ضریب پواسون			چگالی ρ (Kg/m ³)
	E ₁ (GPa)	E ₂ (GPa)	E ₃ (GPa)	G ₁₂ (GPa)	G ₁₃ (GPa)	G ₂₃ (GPa)	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	
T300	۱۳۲	۱۰.۸	۱۰.۸	۵.۶۵	۵.۶۵	۳.۳۵	۰.۲۴	۰.۲۴	۰.۴۹	۱۵۴۰

۳- حل تحلیلی

معادلات حاکم به دست آمده در بخش قبل، در چارچوب روش گلرکین^۱ که یکی از راه‌حل‌های تحلیلی برای مسائل ارتعاشاتی

است حل شده است. در این روش میدان‌های جابجایی پوسته‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} X_n(x_1) Y_m(x_2) e^{i\omega_n t} \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \bar{X}_n(x_1) \bar{Y}_m(x_2) e^{i\omega_n t} \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \tilde{X}_n(x_1) \tilde{Y}_m(x_2) e^{i\omega_n t} \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن، U_{mn} ، V_{mn} و W_{mn} ضرایب مجهول و همچنین $(X_n, Y_m, \bar{X}_n, \bar{Y}_m, \tilde{X}_n, \tilde{Y}_m)$ توابع مثلثاتی می‌باشند. بطور مثال

برای شرایط مرزی ساده-ساده و گیردار-گیردار توابع فوق بصورت زیر در نظر گرفته شده است.

¹ Galerkin's method

$$X_n(x_1) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right), \bar{X}_n(x_1) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right), \tilde{X}_n(x_1) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right) \quad (18)$$

$$Y_m(x_2) = \cos\left(\frac{m\pi}{S}x_2\right), \bar{Y}_m(x_2) = \sin\left(\frac{m\pi}{S}x_2\right), \tilde{Y}_m(x_2) = \cos\left(\frac{m\pi}{S}x_2\right)$$

$$X_n(x_1) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right), \bar{X}_n(x_1) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right), \tilde{X}_n(x_1) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_1\right) \quad (19)$$

$$Y_m(x_2) = \cos\left(\frac{m\pi}{S}x_2\right), \bar{Y}_m(x_2) = \sin\left(\frac{m\pi}{S}x_2\right), \tilde{Y}_m(x_2) = \cos\left(\frac{m\pi}{S}x_2\right)$$

که در معادلات فوق $x_2 = R\theta$ و $S = \pi R$ می‌باشد. این توابع برای ارضا کردن شرایط مرزی در دو انتهای پوسته استوانه‌ای ارائه می‌شوند. شایان ذکر است که در مقاله حاضر، اثرات شرایط مرزی مختلف بررسی شده است. با جایگذاری معادله (۱۷) در معادلات حاکم و انتگرال‌گیری در راستای طول و محیط استوانه، منجر به مساله مقدار ویژه زیر خواهد شد:

$$([K] - \omega_n^2[M]) \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

در معادله (۱۶)، $[K]$ و $[M]$ به ترتیب ماتریس سفتی و ماتریس جرم می‌باشند. به منظور حل مساله مقدار ویژه به دست آمده، دترمینان ماتریس ضرایب در سمت چپ معادله (۱۹) باید برابر صفر شود.

$$\det([K] - \omega_n^2[M]) = 0 \quad (20)$$

با حل معادله فوق، فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای به دست خواهد آمد.

۴- نتایج عددی و بحث

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از تحلیل پوسته‌های تک‌جداره و دوجداره پرداخته خواهد شد. برای صحت سنجی نتایج در جدول (۲) فرکانس‌های اصلی بی‌بعد یک پوسته استوانه‌ای تک‌جداره از جنس یک ماده ایزوتروپ آورده شده است که پارامتر بی‌بعد

$$\bar{\omega} = \omega R \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho}{E}} \quad (14)$$

فرکانس طبق مرجع [۱۴] در پوسته تک‌جداره بصورت تعریف شده است:

جدول ۲. مقایسه فرکانس طبیعی بی‌بعد در شرایط مرزی مختلف در تیر و پوسته

شرایط مرزی	پژوهش حاضر	مرجع [۱۴]
ساده-ساده	۰,۰۱۵۴	۰,۰۱۶۱
گیردار-گیردار	۰,۰۳۳۵	۰,۰۳۲۸
گیردار-ساده	۰,۰۲۹۹	۰,۰۲۳۹

در این مقاله پارامترهای بی‌بعد برای فرکانس طبیعی به صورت زیر معرفی می‌گردند:

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{E_{eq} I}}, \quad E_{eq} = \frac{A_{11}}{h} \quad (21)$$

که A_{11} در رابطه (۱۰) تعریف شده است. در جداول (۳) تا (۵) به بررسی تأثیر طول به قطر بر فرکانس طبیعی آورده شده است که همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش این نسبت، فرکانس طبیعی بی‌بعد نیز افزایش می‌یابد. همچنین با نزدیک شدن قطر

داخلی به قطر خارجی فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته دوجداره به فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته تک‌جداره نزدیک می‌شود. لازم به ذکر است که پارامتر بی‌بعد طبق رابطه (۲۱) در نظر گرفته شده است.

جدول ۳. تأثیر نسبت طول به قطر خارجی بر فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته دوجداره در شرایط مرزی ساده-ساده و لایه‌چینی [90/0/0/90] ($d_2/h=50, d_1=0.8d_2, k_0=10^9(N/m)$)

		m=1			m=2		
		n=1	n=2	n=3	n=1	n=2	n=3
L=2d ₂	Ω	۳.۰۳۰۹	۶.۲۱۸۷	۹.۱۸۳۱	۱.۹۹۳۲	۴.۰۳۳۸	۶.۰۳۶۱
L=5d ₂	Ω	۵.۸۹۸۲	۱۴.۶۸۹۸	۲۳.۰۸۳۰	۷.۱۸۶۸	۱۰.۱۹۴۲	۱۴.۹۲۳۸
L=10d ₂	Ω	۷.۵۸۰۷	۲۳.۵۹۲۷	۴۱.۲۶۷۶	۲۷.۱۳۷۴	۲۸.۷۴۷۲	۳۳.۳۷۹۱
L=20d ₂	Ω	۸.۳۰۹۹	۳۰.۳۲۲۷	۶۰.۴۷۲۸	۱۰.۸	۱۰.۸	۱۱.۰

جدول ۴. تأثیر نسبت طول به قطر خارجی بر فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته دوجداره در شرایط مرزی گیردار-گیردار لایه‌چینی [90/0/0/90] ($d_2/h=50, d_1=0.8d_2, k_0=10^9(N/m)$)

		m=1			m=2		
		n=1	n=2	n=3	n=1	n=2	n=3
L=2d ₂	Ω	۳.۶۹۴۸	۷.۲۵۱۴	۱۰.۵۹۱۰	۲.۵۲۸۸	۴.۸۶۹۴	۷.۱۸۱۳
L=5d ₂	Ω	۸.۵۹۳۴	۱۸.۴۱۱۵	۲۷.۶۶۹۴	۸.۰۷۴۳	۱۲.۹۵۲۸	۱۸.۷۲۱۸
L=10d ₂	Ω	۱۳.۷۱۱۳	۳۴.۳۷۳۷	۵۴.۳۷۲۴	۲۷.۵۹۶۲	۳۲.۲۹۷۰	۴۱.۱۱۵۲
L=20d ₂	Ω	۱۷.۵۵۶۳	۵۴.۸۴۵۱	۹۶۲	۱۰.۸	۱۱.۰	۱۱.۷

جدول ۵. تأثیر نسبت طول به قطر خارجی بر فرکانس طبیعی پوسته دوجداره بی‌بعد در شرایط مرزی گیردار-ساده لایه‌چینی [90/0/0/90] ($d_2/h=50, d_1=0.8d_2, k_0=10^9(N/m)$)

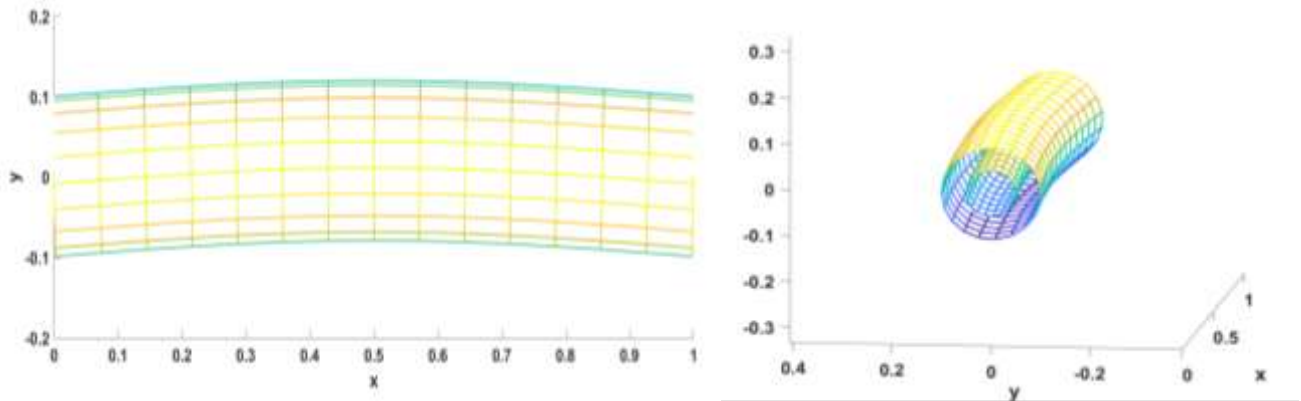
		m=1			m=2		
		n=1	n=2	n=3	n=1	n=2	n=3
L=2d ₂	Ω	۳.۹۷۹۴	۷.۸۵۸۴	۱۱.۴۲۶۴	۲.۶۳۳۴	۵.۲۰۳۳	۷.۶۷۲۱
L=5d ₂	Ω	۸.۸۷۶۳	۱۹.۷۲۶۱	۲۹.۸۸۷۷	۷.۹۹۰۷	۱۳.۲۸۲۳	۱۹.۶۹۸۸
L=10d ₂	Ω	۱۳.۱۹۶۸	۳۵.۵۰۵۳	۵۷.۶۳۱۴	۲۷.۴۸۹۶	۳۱.۹۶۲۹	۴۱.۳۱۵۲
L=20d ₂	Ω	۱۵.۸۴۸۷	۵۲.۷۸۳	۹۶۸	۱۰.۸	۱۱.۰	۱۱.۶

در ادامه به بررسی تأثیر زاویه لایه‌چینی کامپوزیت بر فرکانس طبیعی پوسته کامپوزیتی پرداخته شده است که نتایج آن در جدول (۶) آورده شده است. بدین منظور در شرایط مرزی ساده-ساده و نسبت طول به قطر ۱۰، انواع زوایای لایه‌چینی برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی مورد مطالعه قرار گرفت.

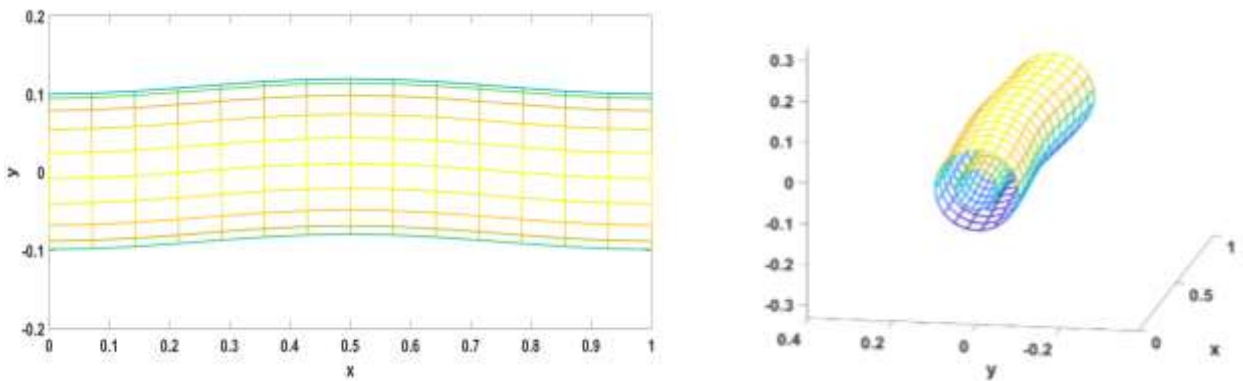
جدول ۶. تأثیر زوایای لایه‌گذاری کامپوزیت بر فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته دوجداره در شرایط مرزی ساده-ساده ($d_2/h=50, d_1=0.8d_2, k_0=10^9(N/m), L=10d_2$)

		m=1		
		n=1	n=2	n=3
[90/0/0/90]	Ω	۷.۵۸۰۷	۲۳.۵۹۲۷	۴۱.۲۶۷۶
[0/90/90/0]	Ω	۷.۵۸۱۷	۲۳.۵۹۷۶	۴۱.۲۸۱۸
[90/0/90/0]	Ω	۷.۲۹۵۲	۲۳.۶۱۷۶	۴۱.۴۶۶۶
[0/90/0/90]	Ω	۷.۳۲۰۷	۲۳.۳۹۵۵	۴۰.۹۷۵۳
[60/90/90/60]	Ω	۸.۱۰۶۸	۳۰.۸۹۶۲	۶۵.۱۸۹۰
[45/30/60/80]	Ω	۱۰.۱۲۰۷	۳۲.۱۸۴۷	۶۳.۵۲۴۷

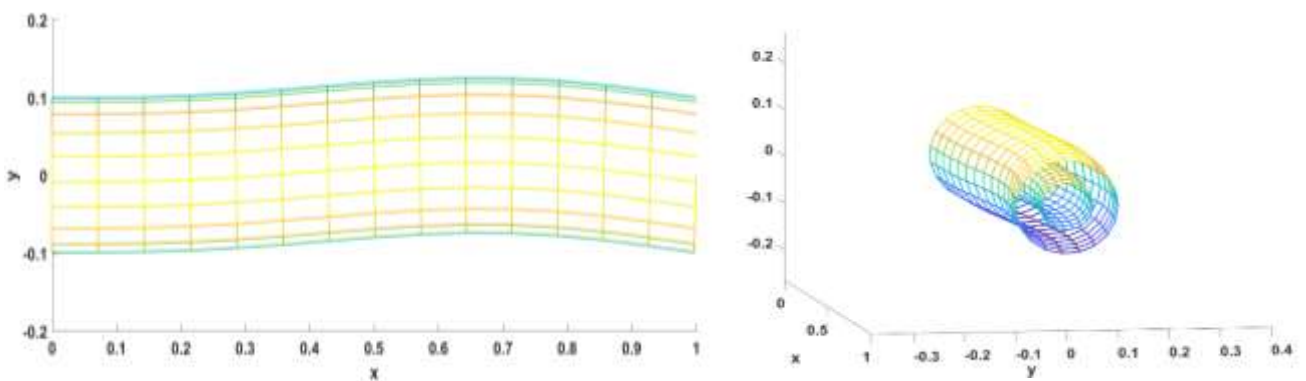
در شکل (۳) تا (۵) نیز شکل موده‌های پوسته دوجداره به ترتیب در شرایط مرزی ساده-ساده، گیردار-گیردار و گیردار-ساده نشان داده شده است.



شکل ۳. شکل مود پوسته در شرایط مرزی ساده-ساده ($d_2/d_1=2, L=5d_2, k_0=10^9, m=n=1$)



شکل ۴. شکل مود پوسته در شرایط مرزی گیردار-گیردار ($d_2/d_1=2, L=5d_2, k_0=10^9, m=n=1$)



شکل ۵. شکل مود پوسته در شرایط مرزی ساده-گیردار ($d_2/d_1=2, L=5d_2, k_0=10^9, m=n=1$)

در جدول (۷) تاثیر افزایش سفتی فنر بر فرکانس طبیعی بی‌بعد اصلی پوسته دوجداره در شرایط مرزی ساده-ساده آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش سفتی فنر، فرکانس طبیعی بی‌بعد اصلی نیز افزایش می‌یابد.

جدول ۷. تاثیر سفتی فنر بر فرکانس طبیعی بی‌بعد در شرایط مرزی ساده-ساده و لایه‌چینی [90/0/90]

$$(d_2/h=50, d_1=0.8d_2, L=20d_2)$$

k_0	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
Ω	۶,۹۱۳۴	۶,۹۲۸۷	۷,۰۶۲۷	۷,۷۷۹۶	۸,۲۴۹۲	۸,۳۰۴۴	۸,۳۰۹۹

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات آزاد لوله‌های کامپوزیتی تودرتو با روش گلرکین مورد بررسی قرار گرفته است. با بررسی نتایج عددی موارد زیر قابل استنباط است.

- ✓ با افزایش نسبت طول به قطر استوانه خارجی، فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای افزایش پیدا می‌کند.
- ✓ با نزدیک شدن قطر داخلی استوانه به قطر خارجی آن، تاثیر بستر کم شده و جواب به حالت پوسته تک‌جداره نزدیک می‌شود.
- ✓ با افزایش سفتی بستر وینکلر، فرکانس طبیعی بی‌بعد پوسته نیز افزایش پیدا می‌کند.

مراجع

- Love, Augustus Edward Hough. "XVI. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.*(A.) 179 (1888): 491-546.
- Leissa AW. *Vibration of shells*. Report LC-77-186367, NASA-sp-288; (1973).
- Donnell LH. Stability of thin walled tubes under torsion. NACA Report 479; (1933).
- Reissner, Eric. "A new derivation of the equations for the deformation of elastic shells." *American Journal of Mathematics* 63.1 (1941): 177-184.
- Sanders, J. L. "An improved first approximation theory for thin shells (NASA TR-R24)." *US Government Printing Office, Washington, DC* (1959).
- Flügge W. *Stresses in shells*. Berlin: Springer-Verlag; (1962).
- Hua, L. I., and K. Y. Lam. "Frequency characteristics of a thin rotating cylindrical shell using the generalized differential quadrature method." *International Journal of Mechanical Sciences* 40.5 (1998): 443-459.
- Lam, K. Y., and Wu Qian. "Vibrations of thick rotating laminated composite cylindrical shells." *Journal of sound and vibration* 225.3 (1999): 483-501.
- Zhang, X. M. "Parametric analysis of frequency of rotating laminated composite cylindrical shells with the wave propagation approach." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 191.19-20 (2002): 2057-2071.
- Zhang, Jing, et al. "Nonlinear vibration analyses of cylindrical shells composed of hyperelastic materials." *Acta Mechanica Solida Sinica* 32 (2019): 463-482.
- Ebrahimi, Farzad, and Ali Dabbagh. "Vibration analysis of multi-scale hybrid nanocomposite shells by considering nanofillers' aggregation." *Waves in Random and Complex Media* 32.3 (2020): 1060-1078.
- Baghbadorani, A. Abedini, and Y. Kiani. "Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells reinforced with graphene platelets." *Composite Structures* 276 (2021): 114546.
- Ebrahimi, Farzad, and Ali Dabbagh. "Vibration analysis of multi-scale hybrid nanocomposite plates based on a Halpin-Tsai homogenization model." *Composites Part B: Engineering* 173 (2019): 106955.
- Loy, C. T., K. Y. Lam, and C. Shu. "Analysis of cylindrical shells using generalized differential quadrature." *Shock and vibration* 4.3 (1997): 193-198.